ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 21 **Februar 1941** **Heft 1**

Inhalt:

Seite

Hauptaufsätze. W. Tollmien u. M. Schäfer: Zur Theorie der Windkanalturbulenz 1

D. Küchemann u. F. Vandrey: Über den Einfluß der Düse (oder des Auffangtrichters) auf Widerstandsmessungen im Freistrahl 17

C. Weber: Über die Minimalsätze der Elastizitätstheorie 32

Fr. A. Willers: Das Knicken schwerer Gestänge 43

H. v. Schelling: Statistische Schätzungen auf kombinatorischer Grundlage 52

Seite

Buchbesprechungen. First Report on Viscosity and Plasticity. — Späth: Physik und Technik der Härte und Weiche. — Rausenberger: Theorie der Rohrrücklaufgeschütze. — Cranz u. v. Eberhard: Die neuzeitliche Entwicklung der Schußwaffen. — Gey und Teichmann: Einführung in die Lehre vom Schuß (Ballistik). — Reger: Tachymetertafeln für neue (zentesimale) Teilung. — Weiter eingegangene Bücher 59

Nachrichten 62

Zuschriften 63

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Theorie der Windkanalturbulenz.

1. Mitteilung.

Von *W. Tollmien* und *Manfred Schäfer* in Dresden.

Nach einem Überblick über frühere Arbeiten wird durch Linearisierung der hydrodynamischen Differentialgleichungen ein mathematisches Modell der Windkanalturbulenz aufgestellt, ohne die übliche Annahme der Isotropie zu machen. Für das Randwertproblem der linearisierten hydrodynamischen Differentialgleichungen wird eine Integrationstheorie entwickelt. Dabei ergibt sich eine Trennung der Strömung in eine Potential- und Diffusionsströmung. Mittelwerte dieser Strömungen werden diskutiert.

1. Geschichtliche Einleitung.

Bei den Windkanälen für Versuche an Flugzeugmodellen tritt als störende Erscheinung die Turbulenz des Luftstromes auf. Da diese die Übertragbarkeit der Meßergebnisse auf die Großausführung gefährden kann, hat man schon seit langem die Windkanalturbulenz quantitativ zu erfassen gesucht. Während man zunächst eine Vergleichsmöglichkeit für die Turbulenz in verschiedenen Windkanälen aus der Beeinflussung des Widerstandsbeiwertes einer Kugel ableitete, maß H. L. Dryden [1][1]) als erster direkt die Intensität der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen mit einer Hitzdrahtschaltung. Inzwischen sind sehr zahlreiche und eingehende experimentelle Untersuchungen der Windkanalturbulenz gefolgt. Dabei hat man oft, um die Erscheinung zu verstärken und bequem abwandeln zu können, vor die Versuchsstrecke Turbulenzgitter geschaltet, die im einfachsten Fall aus einem Rost mit quadratischen Maschen bestehen.

Diese außerordentlich lebhafte Versuchstätigkeit hat ihren Grund darin, daß theoretische Arbeiten von G. I. Taylor [2] seit 1935 ein reges Interesse an der Windkanalturbulenz selbst — ganz abgesehen von ihrer Wichtigkeit für Modellversuche — erweckt hatten. Die Windkanalturbulenz stellt nämlich den einfachsten Fall einer turbulenten Strömung überhaupt dar. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ist hier ja räumlich konstant, so daß keine Energieübertragung von der Haupt- auf die Nebenbewegung erfolgt. Ferner ist die Schwankungsbewegung im Mittel gleichförmig über jeden Querschnitt senkrecht zur Hauptströmung. Taylor

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumsverzeichnis am Schluß dieser Abhandlung.

hat in seinen Untersuchungen noch die Annahme der mittleren Isotropie der Nebenbewegung hinzugefügt, die allerdings für die Windkanalturbulenz keineswegs selbstverständlich ist. Danach sollen sämtliche Mittelwerte, die mit Hilfe der Geschwindigkeitsschwankungen oder ihrer räumlichen Ableitungen in einem bestimmten Raumpunkt gebildet werden können, von einer Drehung oder Spiegelung des Koordinatensystems, das seinen Ursprung in dem betreffenden Raumpunkt hat, unabhängig sein. Am Ausbau dieser Theorie der isotropen Turbulenz war neben ihrem Begründer G. I. Taylor besonders Th. v. Kármán [3] beteiligt.

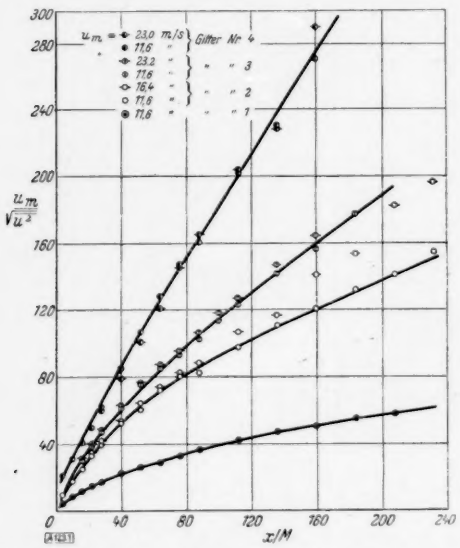


Bild 1. Abnahme der Turbulenzintensität nach Messungen im California Institute of Technology, Pasadena [4] hinter 4 Turbulenzgittern mit quadratischen Maschen von der Weite $M = 1/2$ Zoll und verschiedenen Stabdurchmessern. Die Turbulenzintensität nimmt etwa umgekehrt proportional einer Potenz x^n des Abstandes x vom Turbulenzgitter ab. Der Exponent n hat in den wiedergegebenen Messungen Werte zwischen 0,6 und 0,8.

Wir wollen nun einige typische Probleme aus der Theorie der isotropen Turbulenz herausgreifen. Zunächst fragte man nach der Abnahme der Turbulenzintensität mit wachsendem Abstand von der Turbulenzquelle, sei diese nun ein Gleichrichter oder ein eigens angebrachtes Turbulenzgitter. Dabei hat man als Turbulenzintensität die Quadratwurzel aus dem mittleren Schwankungsquadrat einer Geschwindigkeitskomponente definiert. Oft nahm man dazu die Geschwindigkeitskomponente in der Hauptströmungsrichtung, da sich dann die Messung des Schwankungsquadrates besonders einfach durchführen ließ. In der Frühzeit der Erforschung der isotropen Turbulenz glaubte man allgemein ein Abklingen der Turbulenzintensität mit dem reziproken Abstand von der Turbulenzquelle theoretisch erschließen zu können, was auch mit dem seinerzeit vorliegenden Versuchsmaterial übereinzustimmen schien. Mit fortschreitender Kenntnis hat sich das Erscheinungsbild wesentlich verwickelt. Neuerdings behauptet man nach theoretischen Erwägungen von Th. v. Kármán [3] nur noch, daß das Abklingen nach einem Potenzgesetz erfolgt, ohne daß eine allgemeine Aussage über den Exponenten möglich ist. Auch die Experimente [4] unterstützen diese Aussage (siehe Bild 1); ein allgemeines Abklingungsgesetz existiert jedenfalls sicher nicht. Dryden [5] stellte sogar ein logarithmisches Abklingungsgesetz auf, indem er von einem anderen Gedankenmodell ausging, und konnte dies Gesetz an den Experimenten seines Laboratoriums gut bestätigen.

Sodann interessierte man sich für die räumliche Ausdehnung der Turbulenzelemente („scale of turbulence"), die man auch wohl als Flüssigkeitsballen bezeichnete. Deshalb untersuchte man nach Taylors Vorschlag [6] die Korrelation von zwei Geschwindigkeitsschwankungen, die zur gleichen Zeit, aber an zwei verschiedenen Orten beobachtet werden. Diese Korrelationskoeffizienten hängen also in erster Linie von dem Abstand der beiden Meßpunkte ab. Solche Korrelationskurven sind inzwischen oft gemessen worden. Sie erwiesen sich als ein tiefgreifendes Mittel zur statistischen Beschreibung der isotropen Turbulenz. So konnte G. I. Taylor [2] einen Zusammenhang der durch Reibung dissipierten Turbulenzenergie mit der Krümmung dieser Korrelationskurven aufstellen. Th. v. Kármán [3] führte für die isotrope Turbulenz sämtliche möglichen Korrelationen dieser Art auf zwei Hauptkorrelationen zurück, die ihrerseits durch eine Differentialgleichung verknüpft sind. Solche theoretischen Beziehungen konnten in manchen Fällen experimentell bestätigt werden. Es sei erwähnt, daß Keller und Friedmann [7] solche Korrelationen benutzten, um das Programm einer allgemeinen Turbulenztheorie zu entwerfen, freilich mußten sie dabei gewisse Vernachlässigungen in Kauf nehmen, deren Tragweite umstritten ist. An diese Arbeit anknüpfend, hat Millionshtchikov [8] jüngst einen interessanten Beitrag zur Theorie der isotropen Turbulenz geliefert.

Man hat auch das Spektrum [9], [5] der Windkanalturbulenz experimentell untersucht, d. h. die Verteilung der Geschwindigkeitsschwankungen auf zeitliche Frequenzen. Beziehungen dieses Turbulenzspektrums zu dem mittleren Schwankungsquadrat der betreffenden Geschwindigkeitskomponente und zu einer Korrelationsfunktion wurden von Taylor [10] unter gewissen Annahmen aufgestellt und mit guter Annäherung experimentell bestätigt. Für diese Zusammenhänge ist sogar die sonst wesentliche Voraussetzung der Isotropie entbehrlich.

Wir wollen unseren Überblick über die bisherige Erforschung der Windkanalturbulenz abbrechen, indem wir für weitere Angaben über die schon sehr ausgedehnte Literatur auf den zusammenfassenden Vortrag von G. I. Taylor [11] auf dem Internationalen Mechanikkongreß in Cambridge-Mass. 1938 verweisen. In den Verhandlungen dieses Kongresses finden sich außerdem wichtige theoretische und experimentelle Einzelbeiträge zur Windkanalturbulenz. Im übrigen werden wir selbst in dieser Abhandlung auf manche Ergebnisse der bisherigen Forschung noch eingehender am passenden Orte zu sprechen kommen.

2. Die Problemstellung.

In allen bisherigen Untersuchungen hatte man stets nur Mittelwerte und ihre Beziehungen untereinander betrachtet. Es liegt nun der Versuch nahe, in den Mechanismus dieser einfachsten Turbulenz auf dem Wege tiefer einzudringen, daß ein angemessen vereinfachtes Modell dieser Erscheinung aufgestellt und in seinem kausal bedingten Verhalten betrachtet wird. In Durchführung dieses Programms linearisierten wir die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen, so daß alle Glieder, welche die Geschwindigkeitsschwankungen quadratisch enthalten, gestrichen werden. Nun ist freilich die Linearisierung der hydrodynamischen Differentialgleichungen im allgemeinen ein schwerer Eingriff. Dieses Vorgehen scheint aber im vorliegenden Fall weniger bedenklich; denn einmal sind die Geschwindigkeitsschwankungen durchschnittlich $^1/_{40}$ der Hauptgeschwindigkeit, sodann sind keine Wände vorhanden, die wegen der Haftbedingung hohe Gradienten der Geschwindigkeitsschwankungen erzwingen würden[2]). Für die linearisierten hydrodynamischen Differentialgleichungen wird in dieser Abhandlung eine neue Integrationsmethode entworfen.

Als zweites Unterscheidungsmerkmal unserer Untersuchung möchten wir hervorheben, daß wir die Annahme der mittleren Isotropie fallen ließen, die für alle bisherigen theoretischen Versuche charakteristisch war. Nach den Versuchsbedingungen für die Windkanalturbulenz ist von vornherein nicht einzusehen, weshalb die Turbulenz unbedingt isotrop ausfallen muß, da die Richtung der Hauptströmung eindeutig ausgezeichnet ist. Der Übergang von der Anisotropie zur Isotropie kann allenfalls in größerer Entfernung vom Turbulenzgitter sich vollziehen.

3. Integrationsmethode für das Randwertproblem der nicht-stationären linearisierten hydrodynamischen Differentialgleichungen.

Zur formelmäßigen Darlegung unseres Problems wählen wir folgende Bezeichnungen. Die konstante Hauptgeschwindigkeit bezeichnen wir mit u_m. In ihre Richtung legen wir die x-Achse eines cartesischen Koordinatensystems. Die Schwankungsgeschwindigkeit habe die Komponenten u in der x-Richtung, v in der y-Richtung, w in der z-Richtung; t bedeutet die Zeit. Die Druckschwankung werde mit p bezeichnet. Mit ϱ als Dichte, ν als kinematischer Zähigkeit liefern die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen bei Unterdrückung aller Glieder, die quadratisch in den Geschwindigkeitsschwankungen sind:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u_m\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\,\Delta u,\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u_m\frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\,\Delta v,\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u_m\frac{\partial w}{\partial x}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\,\Delta w
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1).$$

Hinzu tritt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2).$$

Beiläufig führen wir die mittleren Bewegungsgleichungen nach O. Reynolds an. Die Mittelwerte werden über genügend große Zeiten genommen und durch Überstreichen gekennzeichnet. Da die mittlere Geschwindigkeit konstant gleich u_m ist und die Mittelwerte nur von x abhängen sollen, erhält man aus den Reynoldsschen Gleichungen

$$\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}=-\varrho\frac{\partial\overline{u^2}}{\partial x};\qquad \varrho\frac{\partial\overline{u\,v}}{\partial x}=0,\qquad \varrho\frac{\partial\overline{u\,w}}{\partial x}=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(3).$$

[2]) Taylor [12] hat das Auftreten hoher Gradienten der Geschwindigkeit behauptet. Da das Hauptargument von Taylor die 4. Ableitung einer empirischen Funktion benutzt, dürfte diese Taylorsche Behauptung einigen Zweifeln ausgesetzt sein.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt, wenn man das Verschwinden der Geschwindigkeitsschwankungen in sehr großer Entfernung von der Turbulenzquelle, also für große x, hinzunimmt,

$$\overline{u\,v}=0\,,\qquad \overline{u\,w}=0 \quad . \quad . \quad .

Von der harmonischen Funktion H, der Druckschwankung, setzen wir voraus, daß sie bei $x=\infty$ mitsamt ihren ersten und zweiten Ableitungen so stark verschwindet, daß die im folgenden vorgenommenen Integral- und Differentialoperationen durchführbar sind.

Die Differentialgleichung (5) für φ schreiben wir jetzt in der Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+u_m\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{H(x,y,z,t)}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5a),$$

wobei die Reihenfolge der unabhängigen Variablen in H im folgenden streng beizubehalten ist. H wird als Funktionssymbol behandelt, nicht etwa wie p und φ als eine physikalische Größe, für die wir stets dieselbe Bezeichnung verwenden, gleichgültig, wie die unabhängigen Variablen gewählt werden. H ist, was beachtet sein will, nur für positive Werte seines Argumentes definiert. Für t führen wir die neue Variable

$$t'=t-\frac{x}{u_m}$$

ein. Dann wird aus (5a) für $\varphi(x,y,z,t')$:

$$u_m\frac{\partial \varphi(x,y,z,t')}{\partial x}=-\frac{H\left(x,y,z,t'+\frac{x}{u_m}\right)}{\varrho}.$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingung bei $x=\infty$ erhält man:

$$\varphi=-\frac{1}{\varrho u_m}\int_{\infty}^{x} H\left(\xi,y,z,t'+\frac{\xi}{u_m}\right)d\xi,$$

oder in den alten Variablen:

$$\varphi=-\frac{1}{\varrho u_m}\int_{\infty}^{x} H\left(\xi,y,z,t+\frac{\xi-x}{u_m}\right)d\xi \ ^{4}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Um zu beweisen, daß φ harmonisch ist, führen wir in (6) die Variable

$$\tau=\frac{\xi-x}{u_m}$$

ein, wodurch wir

$$\varphi=-\frac{1}{\varrho}\int_{\infty}^{0} H(x+u_m\tau,y,z,\tau+t)\,d\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

erhalten. Diese Lösungsform läßt sich auch unmittelbar durch Einsetzen in (5) mitsamt den Randbedingungen leicht bestätigen. Aus (7) folgt sofort, daß $\Delta\varphi$ mit ΔH verschwindet, vorausgesetzt, daß die zweiten Ableitungen von H beim Unendlichwerden des ersten Argumentes genügend stark verschwinden, wie wir schon eingangs betonten, so daß die Differentiationen unter dem Integralzeichen ausführbar sind.

Wir tun der Allgemeinheit der Lösung also keinen Abbruch, wenn wir φ als harmonische Funktion ansetzen, die bei $x=\infty$ verschwindet.

Die Geschwindigkeitskomponenten u,v,w setzen wir aus je 2 Teilen u_P,u_D bzw. v_P,v_D und w_P,w_D zusammen. Für die ersten Teile können wir

$$u_P=\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v_P=\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w_P=\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

nehmen. Diese Partikularlösung genügt (1) und (2) und der Randbedingung des Verschwindens im Unendlichen. Der erste Strömungsteil ist demnach eine Potentialströmung. Diese Potentialströmung ist bestimmt, wenn wir neben der schon erwähnten Bedingung im Unendlichen φ bei $x=0$ als Funktion von t,y,z vorschreiben. Unser Ansatz (5) erfährt nun nachträglich seine physikalische Deutung als linearisierte Bernoullische Gleichung für nichtstationäre Potentialströmungen.

[4]) Auffallend an der Formel (6) ist, daß φ in einem bestimmten Zeitpunkt durch das Verhalten von H für spätere Zeiten bestimmt wird. Allerdings ist das Verhalten von H für sehr große Zeiten wieder gleichgültig, da H für große Werte des ersten Argumentes stark verschwindet. Immerhin sieht man, daß die Formel (6) wenig zur Berechnung der Größe φ aus H geeignet ist. Wir brauchen sie auch nur zur Herleitung eines allgemeinen Satzes. Die erwähnte merkwürdige Tatsache unterstreicht nochmals, daß wir es nicht mit einem Anfangswertproblem, sondern mit einem Randwertproblem zu tun haben.

Die restlichen Anteile u_D, v_D, w_D müssen dann den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{\partial u_D}{\partial t} + u_m \frac{\partial u_D}{\partial x} = \nu \Delta u_D \quad \ldots \quad (9a),$$

$$\frac{\partial v_D}{\partial t} + u_m \frac{\partial v_D}{\partial x} = \nu \Delta v_D \quad \ldots \quad (9b),$$

$$\frac{\partial w_D}{\partial t} + u_m \frac{\partial w_D}{\partial x} = \nu \Delta w_D \quad \ldots \quad (9c);$$

$$\frac{\partial u_D}{\partial x} + \frac{\partial v_D}{\partial y} + \frac{\partial w_D}{\partial z} = 0 \quad \ldots \quad (10).$$

Wir können dies homogene Differentialgleichungssystem lösen, indem wir aus den beiden nichtgekoppelten Differentialgleichungen (9b) und (9c) v_D und w_D bestimmen. Zur eindeutigen Festlegung von v_D bzw. w_D haben wir dabei neben der Bedingung des Verschwindens im Unendlichen v_D und w_D bei $x = 0$ als Funktion von t, y und z vorzuschreiben. Durch den Ansatz

$$u_D = -\int_{\infty}^{x} \left(\frac{\partial v_D}{\partial y} + \frac{\partial w_D}{\partial z} \right) dx \quad \ldots \quad (11)$$

werden die Kontinuitätsgleichung (10) und die Randbedingungen im Unendlichen befriedigt. Gleichzeitig wird dadurch auch die letzte noch ausstehende Differentialgleichung (9a) erfüllt; denn nach (11) wird

$$\frac{\partial u_D}{\partial t} + u_m \frac{\partial u_D}{\partial x} - \nu \Delta u_D = -\int_{\infty}^{x} \left\{ \frac{\partial^2 v_D}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 w_D}{\partial t \partial z} \right\} dx - u_m \frac{\partial v_D}{\partial y} - u_m \frac{\partial w_D}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_D}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_D}{\partial x \partial z} \right)$$

$$+ \nu \int_{\infty}^{x} \left\{ \frac{\partial^3 v_D}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_D}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 v_D}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 w_D}{\partial z^3} \right\} dx$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y} \int_{\infty}^{x} \left\{ \frac{\partial v_D}{\partial t} + u_m \frac{\partial v_D}{\partial x} - \nu \Delta v_D \right\} dx - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\infty}^{x} \left\{ \frac{\partial w_D}{\partial t} + u_m \frac{\partial w_D}{\partial x} - \nu \Delta w_D \right\} dx = 0.$$

Dabei ist die Existenz der Integrale (11), sowie mehrfach ihre Differenzierbarkeit unter dem Integralzeichen vorausgesetzt. Von dem Zutreffen dieser Voraussetzungen (genügend starkes Verschwinden von v_D und w_D bei $x = \infty$) kann man sich nach der tatsächlichen Herstellung der Lösungen überzeugen.

Über eine allgemeine Integrationsmethode hinaus erhielten wir eine physikalisch interessante Scheidung der Strömung in einen Potentialanteil und einen Teil, den wir Diffusionsanteil nennen wollen, da die Differentialgleichungen (9) für einen Diffusionsvorgang, allerdings mit Konvektion, charakteristisch sind [5]. Die Bezeichnung „Reibungsströmung" wäre mißverständlich. Für diese Trennung der Strömung in Potential- und Diffusionsanteil wurden dabei nur Bedingungen starken Verschwindens im Unendlichen für Druck und Geschwindigkeitskomponenten benutzt. Trotzdem das Differentialgleichungssystem (1), (2) häufig diskutiert ist, insbesondere von Oseen [15], so ist uns die vorstehende Integrationsmethode aus der Literatur nicht bekannt. Die Übertragung auf Fälle mit anderen Rand- oder Anfangsbedingungen scheint leicht möglich [6].

Die zur vollständigen Bestimmung unseres Problems bei $x = 0$ vorgeschriebenen Randverteilungen lassen sich auch leicht physikalisch deuten. Einmal wird $\varphi = \varphi_0$ gefordert. Diese Potentialverteilung bei $x = 0$ hängt aber unmittelbar mit der dortigen Verteilung der Druckschwankungen p_0 zusammen, vgl. etwa die später aufgestellte Formel (42). Nach dieser Festlegung des Potentialanteiles der Strömung hat man auch $v_P = v_{P_0}$ und $w_P = w_{P_0}$ bei $x = 0$. Der Rest der Querschwankungen bei $x = 0$: $v_0 - v_{P_0}$ bzw. $w_0 - w_{P_0}$ muß gleich den Randwerten der Diffusionsströmung v_{D_0} und w_{D_0} sein. Die Vorgabe der drei Randverteilungen φ_0, v_{D_0}, w_{D_0} kommt also darauf hinaus, daß die Druck- und Quergeschwindigkeitsschwankungen bei $x = 0$ vorgeschrieben sind.

[5] Die Trennung der linearisierten Strömung in Potential- und Diffusionsanteil wurde zuerst 1938 in einer Diskussionsbemerkung [14] auf dem Mechanikkongreß in Cambridge-Mass. von dem ersten Verfasser dieser Abhandlung mitgeteilt.

[6] L. Prandtl [16] hat neuerdings aus Messungen von H. Reichardt im geschlossenen Kanal vermutet, daß die Schwankungen sich aus einem zähigkeitsunabhängigen und aus einem zähigkeitsabhängigen Bestandteil aufbauen. Diese Vermutung steht in Analogie zu unserem obigen Satz von der Trennung der Schwankungsströmung in Potential- und Diffusionsanteil.

In einer Abhandlung von E. Reißner [17] wird die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

betrachtet, der die Geschwindigkeitsschwankung u gehorchen soll. Zur Zeit $t = 0$ wird die Anfangsverteilung von u im ganzen x-y-z-Raum vorgeschrieben. Wegen der angenommenen Isotropie braucht nur eine Komponente der Geschwindigkeitsschwankung betrachtet werden. Es wird sodann unter anderem die zeitliche Abhängigkeit des räumlichen Mittelwertes von u^2 berechnet. Die Reißnersche Arbeit beschäftigt sich also mit jenem Teil der Strömung, den wir als Diffusionsanteil bezeichneten. Die Herkunft dieser Diffusionsströmung aus den linearisierten Navier-Stokesschen Differentialgleichungen ist bei E. Reißner nicht aufgezeigt. Da weder Druckgefälle noch Kontinuitätsgleichung berücksichtigt sind, handelt es sich bei diesem in seiner Einfachheit bemerkenswerten Gedankenbild der isotropen Turbulenz eigentlich nicht um ein hydrodynamisches Modell.

4 Mittelwertberechnung nach dem Parsevalschen Satz für Fourierintegrale. Sätze von G. I. Taylor und J. Kampé de Fériet über das Turbulenzspektrum und Meßergebnisse.

Die beiden klassischen Randwertprobleme, auf die unser Integrationsverfahren führte, werden wir teilweise nach der Greenschen Methode, teilweise nach der Fourierintegralmethode behandeln. Für die Abhängigkeit von der Zeit werden wir stets ein Fourierintegral ansetzen; einmal, weil die Verteilung der Geschwindigkeitsschwankungen auf zeitliche Frequenzen, das „Turbulenzspektrum", auch experimentell untersucht ist und wir einen Zusammenhang zwischen Turbulenzspektrum und Abklingen der Turbulenzintensität feststellen werden, zum anderen, weil die Berechnung der zeitlichen Mittelwerte durch den Parsevalschen Satz für Fourierintegrale stark vereinfacht wird.

Da verschiedene Bezeichnungen in der Theorie der Fourierintegrale nebeneinander üblich sind, setzen wir zunächst eine bestimmte Bezeichnung fest. $F(\lambda)$ ist die Fourier-transformierte einer Funktion $f(t)$, wenn

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

gilt[7]). Dabei ist

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12a).$$

Für eine reellwertige Funktion $f(t)$ ist der Realteil von $F(\lambda)$ eine gerade Funktion von λ, der Imaginärteil eine ungerade. Sodann führen wir die Parsevalschen Formeln an. Es seien $F(\lambda)$ und $G(\lambda)$ Fouriertransformierte von $f(t)$ bzw. von $g(t)$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \tilde{g}(t)\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, G(\lambda)\, d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

wobei durch eine darübergesetzte Tilde ($\sim$) der Übergang zur konjugiert komplexen Funktion angezeigt werden soll[8]). Für $g(t) = f(t)$ ergibt sich die Parsevalsche Formel im engeren Sinne:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2\, d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Ferner sei der Faltungssatz erwähnt. Zu der durch „Faltung" entstandenen Funktion von t:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(t-u)\, du$$

gehört die Fouriertransformierte $2\pi F(\lambda) G(\lambda)$. Für die Gültigkeit dieser Beziehungen ist hinreichend, daß f und g für absolut sehr große t genügend stark verschwinden, was wir bei den Funktionen unserer Anwendungen stets voraussetzen können.

Die entsprechenden Formeln für Funktionen von 3 Veränderlichen t, y, z werden zum Teil auch benötigt. $F(\lambda, \mu_1, \mu_2)$ ist die Fouriertransformierte von $f(t, y, z)$, falls

$$f(t,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda, \mu_1, \mu_2)\, e^{i\lambda t + i\mu_1 y + i\mu_2 z}\, d\lambda\, d\mu_1\, d\mu_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

[7]) Allgemein werden Fouriertransformierte mit großen Buchstaben, die ursprünglichen Funktionen mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet werden.

[8]) Man beachte, daß $\tilde{G}(\lambda)$ nicht die Fouriertransformierte von $\tilde{g}(t)$, sondern von $\tilde{g}(-t)$ ist!

gilt. Dann ist

$$F(\lambda,\mu_1,\mu_2)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y,z)\,e^{-(i\lambda t+i\mu_1 y+i\mu_2 z)}\,dt\,dy\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die allgemeine Parsevalsche Formel lautet jetzt:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y,z)\,\bar{g}(t,y,z)\,dt\,dy\,dz\\ &\qquad=(2\pi)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda,\mu_1,\mu_2)\;\bar{G}(\lambda,\mu_1,\mu_2)\,d\lambda\,d\mu_1\,d\mu_2\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17);$$

die spezielle Parsevalsche Formel ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t,y,z)|^2\,dt\,dy\,dz=(2\pi)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda,\mu_1,\mu_2)|^2\,d\lambda\,d\mu_1\,d\mu_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Die Parsevalschen Formeln werden wir zur Berechnung von Mittelwerten verwenden. Gedanklich würde es am meisten befriedigen, wenn der Mittelwert von, sagen wir, u^2 definiert wäre durch:

$$\overline{u^2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} u^2\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Nun würde eine solche Definition höhere Hilfsmittel aus der neueren Theorie der Fourierintegrale erfordern. Vor allem entspricht diese Definition durchaus nicht dem Vorgehen beim Experimentieren. Deshalb nehmen wir bei unserer Mittelwertdefinition nicht den Grenzübergang zu unendlichem T vor, sondern bleiben bei einer endlichen, wenn auch sehr großen Beobachtungszeit T. Da wir aber für die Methode der Fourierintegrale den zeitlichen Verlauf für alle Zeiten brauchen, setzen wir die betreffenden Funktionen, oben also u^2, außerhalb der Beobachtungszeit 0; in Formeln also

$$\overline{u^2}=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

wobei

$$u^2\equiv 0 \quad \text{für} \quad t>\frac{T}{2} \quad \text{und} \quad t<-\frac{T}{2}.$$

Als erste Anwendung dieser Überlegungen bringen wir einen Beweis zweier Sätze von G. I. Taylor [10] über den Zusammenhang des sogenannten Turbulenzspektrums mit der Fourierintegraldarstellung der Geschwindigkeitsschwankung u und einem Korrelationskoeffizienten, welcher die räumliche Ausdehnung der Wirbelgebilde charakterisiert. Da diese beiden Sätze zu den wenigen gehören, welche über die Windkanalturbulenz ohne die Annahme der Isotropie vorhanden sind, dürfte eine vereinfachte Ableitung mit leicht zugänglichen Beweismitteln willkommen sein.

Betrachtet werde zunächst die Geschwindigkeitsschwankung u an einem festen Raumpunkt, so daß u eine Funktion der Zeit t allein ist:

$$u=f(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Die Fouriertransformierte von $f(t)$ sei $F(\lambda)$. Bei der Messung des Turbulenzspektrums wird bestimmt, welcher Beitrag zu $\overline{u^2}$ von Schwingungen der verschiedenen zeitlichen Frequenzen n geliefert wird. Der Beitrag von den Frequenzen zwischen n und $n+dn$ wird mit $\overline{u^2}\,q(n)\,dn$ angesetzt, so daß die zu messende Funktion $q(n)$ der Bedingung

$$\int_0^\infty q(n)\,dn=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

genügen muß. Zwischen der Kreisfrequenz λ und der Frequenz n besteht der Zusammenhang

$$\lambda=2\pi n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Nach dem Parsevalschen Satz (14) ist

$$\overline{u^2}\,T=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,dt=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2\,d\lambda=4\pi^2\int_{-\infty}^{+\infty}|F(2\pi n)|^2\,dn \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

XUM

Da $f(t)$ eine reellwertige Funktion ist, wird im Anschluß an eine frühere Bemerkung $|F(\lambda)|^2$ eine gerade Funktion von λ, so daß wir das Integrationsintervall von λ bzw. n nur von 0 bis ∞ gehen lassen können:

$$\overline{u^2} = \frac{8\pi^2}{T} \int_0^\infty |F(2\pi n)|^2 \, dn \quad \ldots \quad (25).$$

Demnach ist $\frac{8\pi^2 |F(2\pi n)|^2}{T} \, dn$ der Beitrag, den die harmonischen Komponenten zwischen n und $n+dn$ zu $\overline{u^2}$ liefern, also gleich $\overline{u^2}\, q(n)\, dn$. Der gesuchte Zusammenhang zwischen Turbulenzspektrum und Fourierintegralzerlegung ist daher

$$\frac{8\pi^2 |F(2\pi n)|^2}{T} = \overline{u^2}\, q(n) \quad \ldots \quad (26).$$

Da $|F(2\pi n)|^2$ eine gerade Funktion von n ist, muß die Spektralfunktion $q(n)$, die zunächst nur für positive n definiert ist, für negative n als gerade Funktion fortgesetzt werden, damit die Beziehung (26) allgemein gültig ist.

Jetzt soll in die laufende Auseinandersetzung noch der Korrelationskoeffizient einbezogen werden, der zwischen zwei gleichzeitigen Geschwindigkeitskomponenten u gilt, die an zwei in der x-Koordinate verschiedenen Plätzen beobachtet werden. Streng genommen, müßte man dafür etwa, wenn man von $x=0$ ausgeht,

$$\frac{\overline{u(0,y,z,t)\quad u(x,y,z,t)}}{\sqrt{\overline{u^2(0,y,z,t)}}\;\sqrt{\overline{u^2(x,y,z,t)}}}$$

nehmen. Statt dessen nimmt man wegen der kleinen x, für die man diese Größe überhaupt von 0 verschieden findet, mit guter Annäherung

$$R_x = \frac{\overline{u(0,y,z,t)\quad u(x,y,z,t)}}{\overline{u^2(0,y,z,t)}} \quad \ldots \quad (27).$$

Wir setzen wie vorhin $u(0,y,z,t)=f(t)$. Taylor macht nun die einfache Annahme, daß das zeitliche Schwankungsbild unverändert mit der Hauptströmung u_m stromabwärts transportiert wird, jedenfalls über die kleinen Entfernungen, die bei der Bildung der Korrelationen in Frage kommen. Folglich soll

$$u(x,y,z,t) = f\left(t - \frac{x}{u_m}\right) \quad \ldots \quad (28)$$

sein. Damit wird

$$\overline{u^2}\, T R_x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f\left(t - \frac{x}{u_m}\right) dt \quad \ldots \quad (29).$$

Ist nun wiederum $F(\lambda)$ die Fouriertransformierte von $f(t)$, d. h.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda,$$

so folgt, indem man t durch $t - \frac{x}{u_m}$ ersetzt,

$$f\left(t - \frac{x}{u_m}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, e^{-i\lambda \frac{x}{u_m}}\, e^{i\lambda t}\, d\lambda \quad \ldots \quad (30),$$

m. a. W., $F(\lambda)\, e^{-i\lambda \frac{x}{u_m}}$ ist die Fouriertransformierte von $f\left(t - \frac{x}{u_m}\right)$. Nach dem allgemeinen Parsevalschen Satz (13) ist daher

$$\overline{u^2}\, T R_x = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, \bar{F}(\lambda)\, e^{i\frac{\lambda x}{u_m}}\, d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2\, e^{i\frac{\lambda x}{u_m}}\, d\lambda \quad \ldots \quad (31).$$

Da $|F(\lambda)|^2$ eine gerade Funktion von λ ist, kann man auch schreiben:

$$\overline{u^2}\, T R_x = 4\pi \int_0^\infty |F(\lambda)|^2 \cos\frac{\lambda x}{u_m}\, d\lambda,$$

oder mit n statt λ:

$$\overline{u^2}\, T\, R_x = 8\,\pi^2 \int_0^\infty |F(2\pi n)|^2 \cos\frac{2\pi n x}{u_m}\, dn \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32).$$

Mit der Beziehung (26) zwischen $|F|^2$ und der Spektralfunktion q ergibt sich schließlich

$$R_x = \int_0^\infty q\,(n) \cos\frac{2\pi n x}{u_m}\, dn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33).$$

Umgekehrt gilt

$$q\,(n) = \frac{4}{u_m} \int_0^\infty R_x \cos\frac{2\pi n x}{u_m}\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

R_x und q sind demnach wechselseitig Fouriertransformierte.

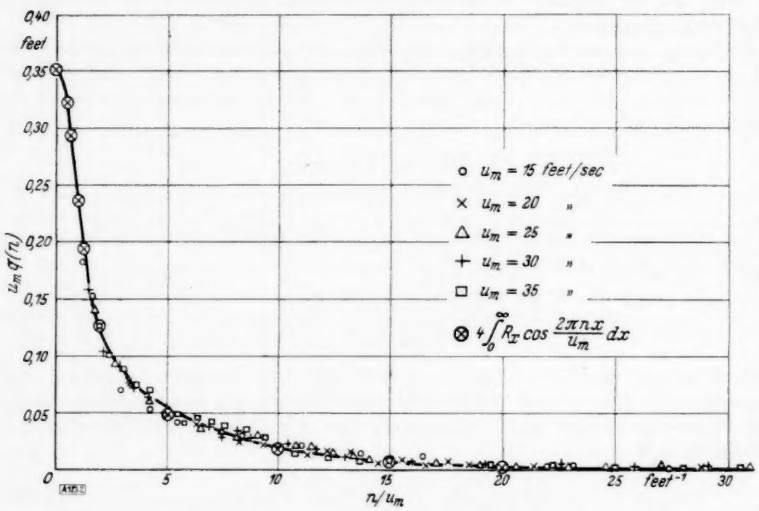


Bild 2. Turbulenzspektrum und Korrelation R_X nach Messungen von L. F. G. Simmons [10] im Abstand von $^1/_3$ Maschenweiten hinter einem Turbulenzgitter aus Flachstäben mit einer Weite der quadratischen Maschen von 3 Zoll.

Diese Beziehung ist experimentell recht gut bestätigt an Messungen von Simmons und Salter [9] (siehe Bild 2), ferner an Messungen von Dryden [5] und seinen Mitarbeitern. Offenbar ist dieser Satz nicht einmal auf die Windkanalturbulenz beschränkt, da ja nur eine gewisse Erhaltungstendenz des turbulenten Schwankungsbildes vorausgesetzt wird. So konnten Reichardt und Motzfeld [18] seine Gültigkeit auch im rechteckigen Rohr nachweisen.

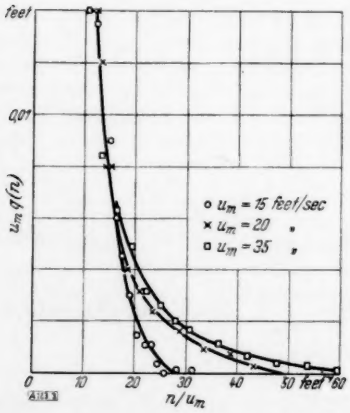


Bild 3 (links). Turbulenzspektrum nach Messungen von L. F. G. Simmons [10] im höheren Frequenzbereich.

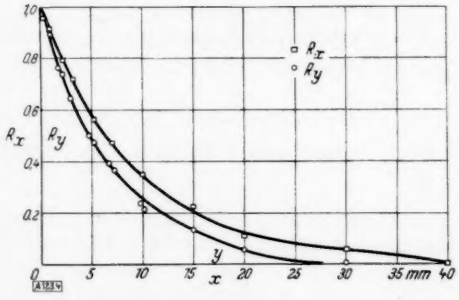


Bild 4. Messungen der Korrelationen R_X und R_Y im National Bureau of Standards, Washington [5] im Abstand von $25^1/_2$ Maschenweiten hinter einem quadratischen Turbulenzgitter der Maschenweite 1 Zoll bei einer Windgeschwindigkeit von 40 feet/sec.

Sehr bedeutsam scheint für die Windkanalturbulenz die in diesem Zusammenhang getroffene Feststellung G. I. Taylors über die Abhängigkeit der Spektralfunktion q von der Geschwindigkeit u_m. Nach den Experimenten ist $u_m\,q$ fast im ganzen Bereich von n eine Funktion von $\frac{n}{u_m}$ allein. Dies bedeutet, daß die Strömungen bei allen untersuchten Geschwindigkeiten u_m im großen und ganzen ähnlich bleiben. Praktisch (etwa zu 99%) ist

die ganze Turbulenzenergie auf harmonische Komponenten zurückzuführen, deren mittlere Verteilung ähnlich bleibt (siehe Bild 2). Der nicht ähnliche Rest des Spektrums (siehe Bild 3) liegt bei den hohen Frequenzen; er trägt, wie gesagt, zur Turbulenzintensität außerordentlich wenig bei, dagegen sehr viel zur Dissipation (in manchen Fällen 73%). Schließlich hat Dryden [19] das Turbulenzspektrum in 2 verschiedenen Abständen vom Gitter gemessen. Danach scheint die Energie aller Frequenzen ungefähr gleich stark abzunehmen.

Aus dem raschen Abklingen von R_x mit x konnte J. Kampé de Fériet [20] den wichtigen Schluß ziehen, daß das Turbulenzspektrum ein linienfreies kontinuierliches Spektrum darstellt. Ferner machte J. Kampé de Fériet über die Spektralfunktion $q(n)$ die Aussage, daß sie bei $n=0$ nicht verschwindet. Während in der Originalfassung der Beweis dieser Sätze mittels der Summenfunktion von $q(n)$ und Fourier-Stieltjesscher Integrale geführt wird, wollen wir uns hier mit unseren einfachen Hilfsmitteln Einsicht in den Sachverhalt verschaffen. Wären Linien in dem Turbulenzspektrum vorhanden, so müßte die für kontinuierliches Spektrum definierte Spektralfunktion $q(n)$ an einzelnen Stellen unendlich werden. Nach der Formel (34) tritt dies wegen des experimentell festgestellten raschen Abklingens von R_x mit x aber nirgends ein, also ist kein Linienspektrum zu erwarten. Dieselbe Formel liefert

$$q(0)=\frac{4}{u_m}\int_0^\infty R_x\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Da R_x nach allen bisherigen Messungen für die Windkanalturbulenz sogar stets positiv ist[9]), muß entsprechend der Behauptung von Kampé de Fériet $q(0)$ von 0 verschieden sein.

5. Die Potentialströmung und einige ihrer Mittelwerte.

Nach diesem Zwischenspiel, das uns mit wichtigem Erfahrungsstoff bekannt gemacht hat, wenden wir uns zur Lösung der klassischen Randwertprobleme, auf die wir unser hydrodynamisches Problem zurückgeführt haben. Zunächst stellen wir den Potentialanteil der Strömung her, d. h. eine Lösung φ von

$$\Delta\varphi=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

im Halbraum $x>0$ mit den Randbedingungen

$$\varphi=\varphi_0(y,z,t) \text{ bei } x=0$$

und den Bedingungen des Verschwindens im Unendlichen.

Die zeitliche Fouriertransformierte von $\varphi_0(y,z,t)$ sei $\Phi_0(\lambda,y,z)$, d. h.

$$\varphi_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\lambda,y,z)\,e^{i\lambda t}\,d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Die zeitliche Fouriertransformierte $\Phi(\lambda,x,y,z)$ von $\varphi(x,y,z,t)$ bestimmt sich dann nach dem Poissonschen Integral zu

$$\Phi=\frac{x}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\lambda,\eta,\zeta)\,\frac{d\eta\,d\zeta}{\{x^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\}^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Daraus lassen sich die Geschwindigkeitsbeiträge der Potentialströmung und insbesondere der Druck berechnen. Abschätzungen der mittleren Quadrate dieser Geschwindigkeitskomponenten wurden mit der Schwarzschen Ungleichung vorgenommen. Da diese Diskussion aber bisher nicht zu interessanten Resultaten geführt hat, wollen wir uns gleich der zweiten benutzten Lösungsmethode zuwenden.

Der Randverteilung $\varphi_0(y,z,t)$ wird jetzt als zeitlich-räumliche Fouriertransformierte $\Phi_0(\lambda,\mu_1,\mu_2)$ zugeordnet, d. h.

$$\varphi_0(y,z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\lambda,\mu_1,\mu_2)\,e^{i\lambda t+i\mu_1 y+i\mu_2 z}\,d\lambda\,d\mu_1\,d\mu_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

Die zeitlich-räumliche Fouriertransformierte $\Phi(\lambda,\mu_1,\mu_2)$ von $\varphi(y,z,t)$ ergibt sich zu

$$\Phi=\Phi_0(\lambda,\mu_1,\mu_2)\,e^{-\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\,x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40),$$

[9]) Dagegen kann R_y, der Korrelationskoeffizient zwischen zwei gleichzeitigen Geschwindigkeitsschwankungen u an zwei Punkten, die um y quer zum Strom auseinanderliegen, nach manchen Beobachtungen auch schwach negativ werden, vgl. etwa [10], Bild 4 oder [11], Bild 2.

oder ausgeschrieben,

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\lambda, \mu_1, \mu_2)\, e^{-\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\,x + i\lambda t + i\mu_1 y + i\mu_2 z}\, d\lambda\, d\mu_1\, d\mu_2 \quad . \quad . \quad . \quad (40a).$$

Die zeitlich-räumlichen Fouriertransformierten der Geschwindigkeitskomponenten der Potentialströmung sind

$$\left.\begin{aligned} U_P &= -\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\;\Phi_0(\lambda, \mu_1, \mu_2)\, e^{-\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\,x}, \\ V_P &= \quad i\mu_1 \quad\; \Phi_0(\lambda, \mu_1, \mu_2)\, e^{-\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\,x}, \\ W_P &= \quad i\mu_2 \quad\; \Phi_0(\lambda, \mu_1, \mu_2)\, e^{-\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\,x} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Die zeitlich-räumliche Fouriertransformierte des Druckes ist

$$P = -\varrho\left\{i\lambda - u_m\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\right\}\Phi_0(\lambda, \mu_1, \mu_2)\, e^{-\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\,x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Bei der Berechnung der Mittelwerte nehmen wir an, daß die Randverteilung $\varphi_0(y, z, t)$ für $|t| > \frac{T}{2}$, $|y| > \frac{Y}{2}$, $|z| > \frac{Z}{2}$ identisch 0 wird. Wir setzen deshalb den quadratischen zeitlich-räumlichen Mittelwert von u_P

$$\overline{u_P^2} = \frac{1}{TYZ}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u_P^2\, dt\, dy\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43);$$

vgl. dazu unsere früheren Bemerkungen über Mittelbildung bei der Gleichung (20). Gewisse Bedenken gegen diese Mittelwertdefinition sollen für den Augenblick zurückgestellt werden. Nach dem Parsevalschen Satz (18) wird aus dieser Mittelwertdefinition

$$\overline{u_P^2} = \frac{1}{TYZ}(2\pi)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |U_P|^2\, d\lambda\, d\mu_1\, d\mu_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Führen wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(\lambda, \mu_1, \mu_2)|^2\, d\lambda = \Phi_0^*(\mu_1, \mu_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

ein, so hat man schließlich

$$\left.\begin{aligned} \overline{u_P^2} &= \frac{1}{TYZ}(2\pi)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1^2+\mu_2^2)\,\Phi_0^*(\mu_1, \mu_2)\, e^{-2\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\,x}\, d\mu_1\, d\mu_2, \\ \overline{v_P^2} &= \frac{1}{TYZ}(2\pi)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_1^2 \quad \Phi_0^*(\mu_1, \mu_2)\, e^{-2\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\,x}\, d\mu_1\, d\mu_2, \\ \overline{w_P^2} &= \frac{1}{TYZ}(2\pi)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_2^2 \quad \Phi_0^*(\mu_1, \mu_2)\, e^{-2\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\,x}\, d\mu_1\, d\mu_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort die merkwürdige Beziehung

$$\overline{u_P^2} = \overline{v_P^2} + \overline{w_P^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Dieser Satz ist zunächst für die zeitlich-räumlichen Mittelwerte abgeleitet, d. h. die Mittelungen sind über die Zeit und den ganzen Querschnitt (senkrecht zu x oder u_m) genommen. Da aber die rein zeitlichen Mittelwerte der ganzen Problemlage nach im wesentlichen konstant über den ganzen Querschnitt sind, gilt dieser Satz auch für die rein zeitlichen Mittelwerte. Weil y vor z nicht irgendwie ausgezeichnet ist, wird außerdem $\overline{v_P^2} = \overline{w_P^2}$ sein. Der quadratische Mittelwert der Längsschwankung der Potentialströmung ist also das Doppelte des quadratischen Mittelwertes einer Querschwankung. Die Potentialströmung kann also für sich allein nicht isotrop sein.

Wie schon erwähnt, kann man gegen unsere Mittelwertsdefinition einen Einwand machen. Bei dieser Definition war vorausgesetzt, daß die zu mittelnden Größen im wesentlichen nur innerhalb der Querschnittabmessungen Y, Z und innerhalb des Zeitabschnittes T von 0 verschieden sein sollen, während sie außerhalb dieser Grenzen praktisch verschwinden sollen. Freilich kann man diese Eigenschaften in der Randebene $x = 0$ erzwingen, aber für

größere x breitet sich die zunächst auf $-\frac{Y}{2} \leqq y \leqq \frac{Y}{2}$, $-\frac{Z}{2} \leqq z \leqq \frac{Z}{2}$ beschränkte Erregung seitwärts aus. Eine zeitliche Ausbreitung spielt bei der Potentialströmung keine Rolle, da $\Delta\varphi = 0$ die Zeit nicht enthält.

Um einen Begriff zu bekommen, inwieweit diese seitliche Ausbreitung die Mittelwerte und ihr besonders interessantes Abklingen mit x verfälscht, studieren wir ein ganz einfaches Beispiel. Wir nehmen zur ersten Orientierung sogar eine ebene Potentialströmung in der x-y-Ebene und betrachten die Mittelwerte von $u_P{}^2$. Da u_P ebenfalls der Laplaceschen Potentialgleichung genügt, können wir leicht die Verteilung von u_P anschreiben, die bei $x = 0$ für $-\frac{Y}{2} \leqq y \leqq \frac{Y}{2}$ bestimmte Randwerte, sagen wir $u_{P_0} = \sin \alpha y$, außerhalb den Wert 0 ebenso wie im Unendlichen annimmt.

Die gesuchte Lösung stellen wir am besten durch Superposition her. Als Elementarlösung nehmen wir dasjenige Potential, das bei $x = 0$ für positive y die Werte $u_{P_0} = \sin \alpha y$ annimmt, dagegen für negative y verschwindet. Wir erhalten für diese Elementarlösung nach dem Poissonschen Integral für die Halbebene

$$u_P = \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \eta_1}{x^2 + (y - \eta_1)^2} \, d\eta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48),$$

oder mit $y - \eta_1 = \eta$,

$$u_P = \frac{x}{\pi} \int_y^{-\infty} \frac{\sin \alpha (\eta - y)}{x^2 + \eta^2} \, d\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49).$$

Eine Abschätzung von u_P läßt sich leicht für $y < 0$ mit Hilfe einer alternierenden Reihe finden. Der Zähler des Integranden hat abwechselndes Vorzeichen und ist periodisch, während der Nenner stets zunimmt. Zerlegt man das Integrationsintervall in solche Abschnitte, in denen der Integrand einheitliches Vorzeichen hat, so erhält man dadurch eine Darstellung des Integrals durch eine unendliche Reihe von Integralen mit abwechselndem Vorzeichen. Abgesehen vom ersten dieser Integrale, dessen Intervall bei y beginnt, nimmt der absolute Wert dieser Integrale ab. Eines dieser Integrale ist etwa

$$\frac{x}{\pi} \int_{y_i}^{y_i - \frac{\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha (\eta - y)}{x^2 + \eta^2} \, d\eta ,$$

wobei $\sin \alpha (y_i - y) = 0$ ist. Da y_i negativ ist, hat der Nenner als kleinsten Wert $x^2 + y_i{}^2$. Ersetzt man den Nenner durch diesen Wert und integriert den entstandenen Ausdruck, so bekommt man einen absolut größeren Wert. Als Absolutschranke dieses Integrals bekommt man also $\frac{2x}{\alpha\pi(x^2 + y_i{}^2)}$. Da $|y_i| \geqq y$, so erhält man schließlich als Absolutschranke der alternierenden Reihe, durch die wir u_P darstellen,

$$|u_P| < \frac{2x}{\alpha\pi(x^2 + y^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Für $y > 0$ läßt sich die Abschätzung ganz ähnlich durchführen, wenn man das Integral für u_P zunächst zerlegt:

$$u_P = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha (y - \eta)}{x^2 + \eta^2} \, d\eta - \frac{x}{\pi} \int_y^{+\infty} \frac{\sin \alpha (y - \eta)}{x^2 + \eta^2} \, d\eta .$$

Das erste Integral hat den exakten Wert $e^{-\alpha x} \sin \alpha y$, während das zweite wieder mittels einer alternierenden Reihe abgeschätzt wird und die Absolutschranke $\frac{2x}{\alpha\pi(x^2 + y^2)}$ hat[10]).

Diese Elementarlösung wird zweimal mit nach $-\frac{Y}{2}$ bzw. $+\frac{Y}{2}$ verlegtem Nullpunkt angesetzt, sodann wird die bekannte Lösung $e^{-\alpha x} \sin \alpha y$ für die Randbedingung $u_{P_0} = \sin \alpha y$

[10]) Eine andere naheliegende Abschätzung dieser Elementarlösung u_P erhält man nach (48), wenn man die Absolutschranke 1 des $\sin \alpha \eta_1$ einsetzt: $|u_P| \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Diese Abschätzung ist bei kleinem x und kleinem $|y|$ besser als die obenstehende.

für $-\infty < y < +\infty$ hinzugefügt. Es sei $\sin a\frac{Y}{2} = 0$. Durch Überlagerung dieser drei Lösungen mit passendem Vorzeichen ist es leicht möglich, die gewünschte Lösung herzustellen, die als Randwerte bei $x = 0$ $u_{P_0} = \sin a y$ für $-\frac{Y}{2} \leqq y \leqq +\frac{Y}{2}$ und $u_{P_0} = 0$ für $|y| > \frac{Y}{2}$ hat.

Danach erhält man angenähert

$$\int_{+\infty}^{-\infty} u_P^2 \, dy \approx \frac{1}{2} Y e^{-2ax},$$

wobei der Fehler dieser Näherung absolut genommen kleiner als

$$\frac{4}{\pi a^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{4x}{4x^2 + Y^2}\right) + \frac{8 e^{-ax}}{a\pi} \operatorname{arctg} \frac{Y}{x}, \quad \left(\left|\operatorname{arctg} \frac{Y}{x}\right| < \frac{\pi}{2}\right)$$

ist. Als Mittelwert erhält man

$$\frac{1}{Y} \int_{-\infty}^{+\infty} u_P^2 \, dy \approx \frac{1}{2} e^{-2ax} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

mit einem Fehler, der absolut genommen kleiner als

$$\frac{4}{Y\pi a^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{4x}{4x^2 + Y^2}\right) + \frac{8 e^{-ax}}{Ya\pi} \operatorname{arctg} \frac{Y}{x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

ist. Dieser Fehler[11]) wird mit größer werdendem Y beliebig klein. Als Mittelwert nach unserer Definition hat sich also bei großem Y gerade der Wert ergeben, den man vernünftigerweise unter Verschwinden des Randeinflusses bei unserem leicht übersehbaren Problem erwarten muß.

Die Abschätzung des Fehlers ist bei kleinem x sehr schlecht und könnte leicht durch Heranziehung der in Anmerk.[10]) erwähnten Abschätzungsmethode bei kleinem x und $|y|$ verbessert werden. In dieser Gegend interessiert der Fehler uns aber sowieso nicht.

Bei der Diskussion des räumlichen Problems kann man etwa so vorgehen, daß man ein spezielles $u_P = e^{i\mu_2 z} f(x, y)$ wählt und für $f(x, y)$ ein ebenes Randwertproblem ansetzt, wiederum mit Randwerten bei $x = 0$, die nur im Abschnitt $|y| < \frac{Y}{2}$ von 0 verschieden sind. Man kann aber auch direkt mit der Poissonschen Formel für den Halbraum arbeiten und ganz entsprechende Schlußweisen wie in dem eben diskutierten zweidimensionalen Fall anwenden. Die zeitliche Abhängigkeit hätte man durch Zufügung eines zeitabhängigen Faktors mitberücksichtigen können, sie macht aber bei der Mittelung einer Potentialströmung nach unserer Definition gar keine Schwierigkeiten.

Im übrigen wird man bei Verwendung höherer Hilfsmittel aus der Theorie der Fourierintegrale direkt mit der Mittelwertsdefinition

$$u^2 = \lim_{\substack{T \to \infty \\ Y \to \infty \\ Z \to \infty}} \frac{1}{TYZ} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \int_{-\frac{Y}{2}}^{+\frac{Y}{2}} \int_{-\frac{Z}{2}}^{+\frac{Z}{2}} u^2 \, dt \, dy \, dz$$

arbeiten können. Die vorige Betrachtung hat uns aber einen gewissen Einblick in die wenig erforschte Ausbreitung von Regularitätsdefekten bei der Potentialgleichung gewährt.

6. Die Diffusionsströmung.

Um den zweiten Teil der Strömung, der von uns Diffusionsströmung genannt wurde, zu berechnen, ist die Differentialgleichung

$$\frac{\partial v_D}{\partial t} + u_m \frac{\partial v_D}{\partial x} = \nu \Delta v_D \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9b)$$

im Halbraum $x > 0$ zu lösen, wobei $v_D(x, y, z, t)$ für $x = 0$ eine vorgeschriebene Verteilung $v_{D_0}(y, z, t)$ darstellen soll, während es im Unendlichen verschwinden soll. Ein entsprechendes Randwertproblem ist für w_D zu lösen.

[11]) Bei der Durchführung dieser Fehlerrechnung wurden wir dankenswerterweise durch Herrn Dipl.-Ing. Kurt Sacher unterstützt.

Wir zerlegen zunächst w_D nur nach der Zeit spektral; d. h. setzen

$$v_D(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_D(x,y,z,\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53),$$

entsprechend

$$v_{D_0}(y,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{D_0}(y,z,\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53a),$$

so daß wir für V_D die Differentialgleichung

$$i\lambda\, V_D + u_m \frac{\partial V_D}{\partial x} = \nu \Delta V_D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

erhalten. Setzt man

$$V_D = e^{\frac{u_m}{2\nu} x} \cdot V^* \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55),$$

so kommt man auf die Differentialgleichung

$$\Delta V^* - \left(\frac{i\lambda}{\nu} + \frac{{u_m}^2}{4\nu^2}\right) V^* = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56).$$

Die Randbedingung bei $x=0$ ist $V^* = V_{D_0}$; außerdem muß die Randbedingung des Verschwindens im Unendlichen von V^* ebenfalls erfüllt sein.

Nach der Greenschen Methode ergibt sich als Lösung dieses Randwertproblems

$$V^* = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} V_{D_0}(\eta,\zeta,\lambda) \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} d\eta\, d\zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57).$$

Dabei ist die Greensche Funktion G durch Spiegelung an der Ebene $x=0$ aus der Grundlösung $g(r)$ hergestellt:

$$\left.\begin{aligned} G &= g(r) - g(r'),\\ r &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},\\ r' &= \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},\\ g(r) &= \frac{1}{4\pi r} \exp\left(\frac{i u_m}{\nu} \sqrt{-\frac{i\lambda\nu}{{u_m}^2} - \frac{1}{4}}\, r\right);\\ &\exp(\ldots) \text{ bedeutet } e^{(\ldots)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58).$$

Damit ergibt sich

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \frac{x}{2\pi r^3}\left[1 + \left(\frac{\sigma}{2\nu} + i\frac{\lambda}{\sigma}\right) r\right] \exp\left(-\frac{\sigma}{2\nu} r - \frac{i\lambda}{\sigma} r\right) \quad \ldots\ldots \quad (59),$$

wobei

$$\sigma = \frac{u_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{16\nu^2\lambda^2}{{u_m}^4}} + 1}$$

und in dieser Formel

$$r = \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

wird. Die schließlich aus diesen Ansätzen sich ohne weiteres ergebenden Formeln für v_D, w_D, u_D haben ihre Eignung besonders bei der Erörterung des Einflusses eines endlichen Störungsbereiches bewiesen. In diesem Falle sind nur in einem sehr kleinen Gebiete der Ebene $x=0$ Randwerte, die von 0 verschieden sind, vorgeschrieben. Es haben sich dabei interessante Beziehungen zu den mit anderen Methoden durchgeführten Untersuchungen von Millionshtchikov [8] ergeben.

Bei der zweiten Lösungsmethode verwenden wir zeitlich-räumliche Fouriertransformierte, d. h. es wird

$$v_D(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} V_D(x,\lambda,\mu_1,\mu_2)\, e^{i\lambda t + i\mu_1 y + i\mu_2 z}\, d\lambda\, d\mu_1\, d\mu_2 \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

gesetzt. Die Fouriertransformierte der Randverteilung v_{D_0} sei V_{D_0}:

$$v_{D_0}(y,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} V_{D_0}(\lambda,\mu_1,\mu_2)\, e^{i\lambda t + i\mu_1 y + i\mu_2 z}\, d\lambda\, d\mu_1\, d\mu_2 \quad \ldots\ldots \quad (60a).$$

Man erhält dann

$$V_D = \exp\left\{\frac{x}{2\nu}\left[u_m - \sqrt{{u_m}^2 + 4i\nu\lambda + 4\nu^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)}\right]\right\} V_{D_0} \quad \ldots\ldots \quad (61),$$

wobei das negative Vorzeichen vor der Wurzel andeuten soll, daß die Wurzel mit dem negativen Realteil entsprechend der Randbedingung bei $x=\infty$ zu nehmen ist. Oft empfiehlt es sich, das Argument der Exponentialfunktion in Real- und Imaginärteil zu zerspalten:

$$V_D = \exp\left(-\frac{\sigma - u_m}{2\nu}x - i\frac{\lambda}{\sigma}x\right) V_{D0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62).$$

Dabei ist σ jetzt definiert durch

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Xi}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{16\,\nu^2\lambda^2}{\Xi^2}}+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62a)$$

mit

$$\Xi = u_m^2 + 4\,\nu^2(\mu_1^2+\mu_2^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62b).$$

Entsprechend wird die zeitlich-räumliche Fouriertransformierte von w_D:

$$W_D = \exp\left(-\frac{\sigma - u_m}{2\nu}x - i\frac{\lambda}{\sigma}x\right) W_{D0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63).$$

Nach der Kontinuitätsgleichung läßt sich, wie in Abschnitt 3, Gl. (11), dargelegt wurde, nun auch die Fouriertransformierte von u_D bestimmen:

$$U_D = 2\nu\frac{2\nu\lambda\sigma + i(\sigma - u_m)\sigma^2}{\sigma^2(\sigma-u_m)^2 + 4\nu^2\lambda^2}[\mu_1 V_D + \mu_2 W_D] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64).$$

Als zeitlich-räumliche Mittelwerte der Geschwindigkeitsquadrate der Diffusionsströmung allein erhält man nach dem Parsevalschen Satz:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{v_D^2} &= \frac{8\pi^3}{TYZ}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|V_{D0}|^2\exp\left(-\frac{\sigma-u_m}{\nu}x\right)d\lambda\,d\mu_1\,d\mu_2,\\
\overline{w_D^2} &= \frac{8\pi^3}{TYZ}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|W_{D0}|^2\exp\left(-\frac{\sigma-u_m}{\nu}x\right)d\lambda\,d\mu_1\,d\mu_2,\\
\overline{u_D^2} &= \frac{8\pi^3}{TYZ}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\nu^2\sigma^2}{\sigma^2(\sigma-u_m)^2+4\nu^2\lambda^2}\\
&\quad\{\mu_1^2|V_{D0}|^2+\mu_2^2|W_{D0}|^2+2\mu_1\mu_2(V_{D0r}W_{D0r}+V_{D0i}W_{D0i})\}\,d\lambda\,d\mu_1\,d\mu_2
\end{aligned}\right\} \quad (65).$$

Dabei ist nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$\left.\begin{aligned}
V_{D0} &= V_{D0r} + i\,V_{D0i}\\
W_{D0} &= W_{D0r} + i\,W_{D0i}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

gesetzt. Eine allgemeine Beziehung zwischen den mittleren Quadraten der Geschwindigkeitskomponenten wie bei der Potentialströmung haben wir bei der Diffusionsströmung noch nicht aufgestellt.

Wir wollen noch eine kurze Betrachtung über Zusammenwirken von Potential- und Diffusionsströmung anstellen. Bei der Bildung der mittleren Quadrate der gesamten Geschwindigkeitskomponenten treten auch mittlere Produkte auf, die aus Potential- und Diffusionsanteilen gemischt sind. Nehmen wir wieder zeitlich-räumliche Mittelwerte, so handelt es sich etwa um das mittlere Produkt

$$\overline{v_P v_D} = \frac{1}{TYZ}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_P v_D\,dt\,dy\,dz.$$

Nach dem allgemeinen Parsevalschen Satz (17) bekommt man dafür mit zeitlich-räumlichen Fouriertransformierten:

$$\overline{v_P v_D} = \frac{(2\pi)^3}{TYZ}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} V_P\,\overline{V}_D\,d\lambda\,d\mu_1\,d\mu_2.$$

Allgemeine Sätze über die gemischten Mittelwerte von Potential- und Diffusionsströmung sind vorderhand ebensowenig wie für die reine Diffusionsströmung gewonnen. Solche Beziehungen sind am ehesten zu erwarten, wenn man in der Diffusionsströmung, etwa an Hand der Formel (61), den Grenzübergang zu kleinem ν vornimmt. Die nötigen Aussagen über die praktisch in Frage kommenden Bereiche von λ, μ_1, μ_2 vermögen die Messungen des Turbulenzspektrums und der Korrelationen R_y zu liefern. Auch die Untersuchungen zur Dissipation der Turbulenzenergie würden heranzuziehen sein.

Schrifttumsverzeichnis.

[1] H. L. Dryden und A. M. Knethe: The Measurement of Fluctuations of Air Speed by the Hotwire Anemometer. National Advisory Committee of Aeronautics, Technical Report No. 320, Washington 1929.

[2] G. I. Taylor: Statistical Theory of Turbulence Parts I, II, III, IV, Proc. Roy. Soc. (London) A Bd. 151 (1935), S. 421—478. Part V, ibid. Bd. 156 (1936), S. 307—317.

[3] Th. v. Kármán: On the Statistical Theory of Turbulence, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. Bd. 23 (1937), S. 98—105; The Fundamentals of the Statistical Theory of Turbulence, J. Aeron. Sci., Bd. 4 (1937), S. 131—138; Th. v. Kármán and L. Howarth: On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence, Proc. Roy Soc. (London) A Bd. 164 (1938), S. 192—215.

[4] Th. v. Kármán: Some Remarks on the Statistical Theory of Turbulence, Proc. 5. Internat. Congr. f. Applied Mechanics 1938, S. 347—351.

[5] H. L. Dryden, G. B. Schubauer, W. C. Mock, Jr., und H. K. Skramstad: Measurements of Intensity and Scale of Wind-Tunnel Turbulence and their Relation to the Critical Reynolds Number of Spheres, Nat. Advis. Committee f. Aeronautics, Technic. Rep. No. 581 (1937).

[6] G. I. Taylor: Diffusion by Continuous Movements, Proc. London Math. Soc. Bd. 20 (1922), S. 196.

[7] L. Keller und A. Friedmann: Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit. Proc. 1. Internat. Congr. f. Applied Mechanics Delft 1924, S. 395—409.

[8] M. Millionshtchikov: Decay of Homogeneous Isotropic Turbulence in a viscous incompressible Fluid, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS Bd. XXII (1939), S. 231—235; Decay of Turbulence in Wind Tunnels, ibid. (1939), S. 236—237.

[9] L. F. G. Simmons and C. Salter: An Experimental Determination of the Spectrum of Turbulence, Proc. Roy. Soc. (London) A Bd. 165 (1938), S. 73—89.

[10] G. I. Taylor: The Spectrum of Turbulence, Proc. Roy. Soc. (London) A Bd. 164 (1938), S. 476—490.

[11] G. I. Taylor: Some Recent Developments in the Study of Turbulence, Proc. 5. Internat. Congr. f. Applied Mechanics 1938, S. 294—310.

[12] G. I. Taylor: Production and Dissipation of Vorticity in a Turbulent Fluid, Proc. Roy. Soc. (London) A Bd. 164 (1938), S. 15—23.

[13] L. Prandtl: Beitrag zum Turbulenz-Symposium, Proc. 5. Intern. Congr. f. Applied Mechanics 1938, S. 340—346.

[14] W. Tollmien: Proc. 5. Intern. Congr. f. Applied Mechanics 1938, S. 361.

[15] C. W. Oseen: Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig 1927.

[16] L. Prandtl: Proc. 5. Internat. Congr. f. Applied Mechanics 1938, S. 367/368.

[17] E. Reißner: Note on the Statistical Theory of Turbulence, Proc. 5. Internat. Congr. f. Applied Mechanics 1938, S. 359—361.

[18] H. Reichardt: Über das Messen turbulenter Längs- und Querschwankungen, Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 358—361; H. Motzfeld: Frequenzanalyse turbulenter Schwankungen, Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 362—365.

[19] H. L. Dryden: Turbulence Investigations at the National Bureau of Standards, Proc. 5. Internat. Congr. f. Applied Mechanics 1938, S. 362—368.

[20] J. Kampé de Fériet: Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I. Bd. 59 (1939), S. 145—194; Sur le spectre de la turbulence homogène, Comptes rendus Bd. 208 (1939), S. 722—725. 123

Über den Einfluß der Düse (oder des Auffangtrichters) auf Widerstandsmessungen im Freistrahl.

Von *Dietrich Küchemann* und *Friedrich Vandrey* in Göttingen.

(Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen e. V., Institut für theoretische Aerodynamik.)

Es wird die räumliche Potentialströmung berechnet um Halbkörper und Quellsenkenkörper in einem Windkanal von kreisförmigem Querschnitt, der zum Teil von festen Wänden (Düse, Auffangtrichter) begrenzt wird und zum anderen Teil aus einem freien Strahl besteht. — Zur Erfüllung der Randbedingungen wird die feste Wand mit Quellringen und die Strahlgrenze mit Wirbelringen belegt. Die Integralgleichung für diese Belegung kann durch Iteration numerisch gelöst werden. Aus der Belegung werden die zur eventuellen Korrektur der gemessenen Widerstandsbeiwerte benötigten Zusatzgeschwindigkeiten, sowie der durch den Einfluß der Düse hervorgerufene zusätzliche Widerstand bestimmt. Dieser Zusatzwiderstand liegt in allen praktisch wichtigen Fällen unterhalb der Meßgenauigkeit, während das Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung des Körpers durch die Kanalwände und freien Strahlgrenzen oft merklich gestört wird.

I. Aufgabenstellung und Überblick über die Möglichkeiten zur Lösung der Aufgabe.

In der vorliegenden Arbeit soll die Frage untersucht werden, wie sich der Einfluß der Düse auf die Widerstands-Messungen in einem Windkanal mit freier Meßstrecke auswirkt. Der Kanalquerschnitt wird der Einfachheit halber kreisförmig vorausgesetzt und als Widerstands-

körper werden nur solche genommen, die sich durch eine Quell- und Senkenbelegung auf der Kanalachse darstellen lassen. Durch diese Annahmen wird die Strömung drehsymmetrisch. Der Widerstandskörper ruft auf der Begrenzung Normal- und Tangentialgeschwindigkeiten hervor, und wir haben diejenige Zusatzströmung zu bestimmen, welche auf der festen Wand die Normalgeschwindigkeiten und auf der Begrenzung des freien Strahls die Tangentialgeschwindigkeiten kompensiert. Die entsprechende Aufgabe für den reinen Freistrahl und für den geschlossenen Kreiskanal ist schon früher von H. Lamb u. a.[1]) gelöst worden. Im Gegensatz zu diesen Arbeiten liegt bei der vorliegenden Aufgabe ein gemischtes Randwertproblem vor, auf das sich die bekannten Lösungsmethoden nicht ohne weiteres übertragen lassen.

Es liegt nahe, die Aufgabe zunächst so zu vereinfachen, daß man einen unendlich langen zylindrischen Kanal behandelt, der zum Teil aus fester Wand und zum anderen aus einem Freistrahl besteht. Als störende Singularität nimmt man zunächst eine einzelne Quelle in der Kanalachse an und löst die Randwertaufgabe für verschiedene Lagen der Quelle zur Düse. Durch Überlagerung mehrerer solcher Lösungen lassen sich dann die Strömungen um endliche Widerstandskörper bestimmen.

Es sind zwei grundsätzlich verschiedene Lösungswege zu unterscheiden. Entweder belegt man die Kanalwände und Freistrahlgrenzen mit geeigneten Singularitäten und erhält aus den Randbedingungen eine Integralgleichung für diese Belegung, oder man sucht das Geschwindigkeitspotential oder die Geschwindigkeitskomponenten selbst durch Superposition geeigneter Partikularlösungen der Differentialgleichung der drehsymmetrischen Potentialströmung zu gewinnen. Beide Wege wurden von Herrn W. Flügge und nach dessen Weggang aus Göttingen von den Verfassern untersucht. Über diese Versuche soll zunächt berichtet werden, da sie die Schwierigkeiten dieser und ähnlicher Aufgaben erkennen lassen, den eingeschlagenen Lösungsweg erklären und die noch offenstehenden Fragen mathematischer Art aufzeigen.

1. Differentialgleichungsmethoden. Es ist das gemischte Randwertproblem der Potentialgleichung für drehsymmetrische Strömungen zu lösen: Auf einem Teil des Randes ist das Potential vorgeschrieben (Freistrahl), auf dem anderen seine Normalableitung (Kanalwand). — Um eine einheitliche Lösung für das ganze Gebiet zu erhalten, verschafft man sich eine Funktion $F(x)$, die auf der festen Wand 0 und auf den Freistrahlgrenzen 1 ist. Dann lautet die Randbedingung für das Potential:

$$F \cdot \Phi + k(1-F)\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

mit beliebigem, aber von 0 und ∞ verschiedenem k. Stellt man sich nun einen Windstrom vor, der in periodischem Wechsel Freistrahlmeßstrecken und Kanalstrecken enthält, so kann man $F(x)$ als Fourierreihe darstellen und auch für das gesuchte Potential eine Fourierreihe mit unbekannten Koeffizienten ansetzen. Die Lösung scheitert daran, daß eine Umordnung der Reihen wegen der ungleichmäßigen Konvergenz von $F(x)$ nicht erlaubt ist. Beim Übergang zu unendlicher Periodenlänge ergeben sich bei der Behandlung der Fourier-Integrale entsprechende Schwierigkeiten.

Weiter wurde für Kanal- und Freistrahlstrecken ein getrennter Ansatz versucht. In dem Freistrahl sitzt die störende Quelle Q_0. Zu dem Quellpotential ist eine aus homogenen Lösungen gebildete Reihe zu addieren, die auf dem Strahlrand die axiale Zusatzgeschwindigkeit $u=0$ macht, und für den Kanalbereich ist eine Reihe aus Gliedern anzusetzen, für die auf dem Rande die radiale Zusatzgeschwindigkeit $v=0$ ist. In der Ebene der Kanalmündung müssen die beiden Lösungen zusammengeflickt werden. Dabei erhält man ein unendliches Gleichungssystem für die noch freien Koeffizienten. Es zeigt sich, daß die auf diese Weise gewonnenen Darstellungen nicht konvergieren. Als physikalische Ursache für die Divergenz beider Verfahren kann vermutet werden, daß die Reihen nicht geeignet sind, den Verlauf der Strömung an der Kanalmündung darzustellen.

Ein weiterer Versuch wäre eine andere Bereichsaufteilung, so daß eine schmale Zone beiderseits der Kanalmündung als besonderer Bereich behandelt wird, für den eine Lösung angesetzt werden kann, die alle Randbedingungen an der Übergangsstelle erfüllt. Der einfacheren Rechnung wegen wurde die störende Quelle auch in die Mündungsebene gelegt. Das Zusammenflicken in den beiden Ebenen, die die drei Bereiche (Kanal — Übergang — Freistrahl) trennen, wurde hier nicht durch Reihenentwicklung und Koeffizientenvergleich vorgenommen,

[1]) H. Lamb: On the effect of the walls of an experimental tank on the resistance of a model. ARC-Rep. and Mem. 1010 (1926). — C. N. H. Lock: The interference of a wind tunnel on a symmetrical body. ARC-Rep. and Mem. 1275 (1930). — C. N. Watson: The use of series of Bessel functions in problems connected with cylindrical wind tunnels. Proc. Roy. Soc. Bd. 130 (1930). — C. N. H. Lock und F. C. Johansen: Wind tunnel interference on streamline bodies. ARC-Rep. and Mem. 1451 (1931). — H. Glauert: Interference of a wind tunnel on a symmetrical body. ARC-Rep. and Mem. 1544 (1933).

sondern durch Erfüllung der Übergangsbedingungen in einigen Punkten. Die Durchrechnung ergab, daß zwischen diesen Punkten die Stetigkeitsbedingungen so schlecht erfüllt waren, daß die Rechnung untauglich ist. — Nach diesen Ergebnissen ist es unwahrscheinlich, daß eine besondere Behandlung der Kanalmündung die Lösung des Problems durch Reihenansatz erleichtert.

2. Integralgleichungsmethoden. Als Singularitäten wählt man zweckmäßig Quellen auf der festen Wand und Wirbel auf den Grenzen des freien Strahls, da man auf diese Weise eine Integralgleichung zweiter Art erhält, die eine Lösung durch Iteration gestattet. Bei einer anderen Art der Belegung würde die Integralgleichung zumindest in einem der Bereiche von erster Art sein. — Wir wollen zunächst bemerken, daß sich ein Ansatz der Belegungsdichte als Fourierintegral unbrauchbar erweist, weil nicht für diesen Ansatz Randwerte zu erfüllen sind, sondern für ein Integral darüber. Dieser Integrationsprozeß macht die übliche, auf der Orthogonalität der Kreisfunktionen beruhende Koeffizientenbestimmung unmöglich.

Eine weitere Möglichkeit wäre der Übergang zu unendlich vielen Variablen, indem man die stetige Quell- und Wirbelbelegung durch eine unstetige Verteilung, und zwar zweckmäßig durch eine stückweise lineare, und das Integral durch eine Summe ersetzt. Man erhält so unendlich viele Gleichungen für die Belegungsdichte in ausgewählten Punkten. Mit diesem Verfahren ist es nicht möglich, die Feinheiten der Strömung am Kanalrand selbst zu erfassen. (Sie könnten vielleicht nachträglich durch eine besondere Rechnung klargestellt werden.) Dagegen lieferte die Durchrechnung von Beispielen für die Geschwindigkeit in der Kanalachse ein gutes Bild. Trotzdem sich die Ergebnisse bei einem erheblichen Mehraufwand an Gleichungen nicht wesentlich änderten, ist die numerische Genauigkeit bei diesem Verfahren nicht ausreichend, wie ein Vergleich mit den späteren Ergebnissen zeigte. Der Grund hierfür ist in der ungenauen Kenntnis der Belegung selbst zu suchen. Bei vorsichtiger Wahl der Intervallaufteilung war der erforderliche Rechenaufwand 8 bis 10 Gleichungen, die sich mit dem Rechenschieber eliminieren ließen.

Schließlich haben wir die Möglichkeit, die Integralgleichung auf übliche Weise durch Iteration zu lösen. Die Integralgleichung läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 0 \text{ (feste Wand):} \\ \dfrac{1}{2\pi} J_{vq} + \dfrac{1}{2\pi} J_{v\gamma} - \dfrac{1}{2} q = -v_0 \\ x \geq 0 \text{ (Freistrahl):} \\ \dfrac{1}{2\pi} J_{uq} + \dfrac{1}{2\pi} J_{u\gamma} - \dfrac{1}{2} \gamma = -u_0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Hierin bedeutet q die Quelldichte, γ die Wirbeldichte der gesuchten Belegung, u_0 und v_0 die durch die Quelle auf dem Rande hervorgerufenen Störungsgeschwindigkeiten in axialer und radialer Richtung und z. B. $\frac{1}{2\pi} J_{vq}$ die durch die Quellbelegung auf dem Rande induzierte Radialgeschwindigkeit. Setzt man eine geschätzte Lösung $q^{(0)}$, $\gamma^{(0)}$ in die Integrale ein, so kann man aus der Gleichung eine neue Lösung $q^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$ berechnen, die unter gewissen Voraussetzungen besser ist. Die Rechnung stößt hier auf zwei Schwierigkeiten: Wechsel der Randbedingung an der Kanalmündung und unendliches Integrationsintervall. Der Wechsel der Randbedingung ist von grundsätzlicher Bedeutung. Endet nämlich an der Kanalmündung die Quellbelegung mit einer endlichen Dichte, so ist dort die Axialgeschwindigkeit $u = \infty$, und ebenso gehört zu einer endlichen Wirbeldichte am Freistrahlanfang $v = \infty$. Es müssen also beide Belegungen an der Übergangsstelle Null werden.

Läßt man die Ausgangsnäherung in der Umgebung dieser Stelle linear nach Null abfallen, so genügt das Iterationsergebnis nach unseren Rechnungen dieser Forderung nur dann, wenn der Abfall sehr steil gewählt wird. Wie sich die Belegungen in diesem Gebiet genau verhalten, ließ sich nicht feststellen. In einem entsprechenden ebenen Problem ergab sich ein Abfall proportional $\sqrt{|x|}$. Für die numerische Rechnung genügte jedoch die erwähnte Annahme eines genügend steilen Abfalls. — Das unendliche Integrationsintervall jedoch machte eine Bestimmung der Quellbelegung durch Iteration unmöglich. Für große negative x lautet die Integralgleichung (1) näherungsweise:

$$\frac{1}{2\pi} J_{vq} - \frac{1}{2} q = -v_0$$

oder

$$q = 2 v_0 + \frac{1}{\pi} J_{vq}.$$

Nimmt man als Ausgangsnäherung in diesem Gebiete $q^{(0)} = 2\,v_0$, so geht J_{vq} gegen $2\pi\,v_0$ und damit $q^{(1)}$ gegen $4\,v_0$. Entsprechend ergibt sich

$$q^{(2)} \to 6\,v_0, \ldots\ldots\ldots, q^{(n)} \to 2\,(n+1)\,v_0\,.$$

Mit $q^{(0)} = v_0$ als Ausgangsnäherung erhält man $q^{(n)} \to (2\,n+1)\,v_0$. Das Iterationsverfahren divergiert also. Bei der Wirbelbelegung ergibt sich diese Schwierigkeit nicht, denn $J_{u\gamma}$ geht mit u_0 gebildet gegen $-\pi\,u_0$ und damit

$$\gamma^{(1)} \to u_0\,, \ldots\ldots\ldots\ldots, \gamma^{(n)} \to u_0\,.$$

Das unangenehme Verhalten von q kann man sich plausibel machen: Betrachtet man das Strömungsbild eines Quellringes [2]) (Bild 1), so zeigt sich, daß außerhalb des Ringes auf der Kanalwand nach außen gerichtete Normalgeschwindigkeiten vorhanden sind. Diese treten neben die Normalgeschwindigkeiten der störenden Quelle und müssen ebenfalls kompensiert werden. Die Quellringe heben sich also in ihrer Wirkung zumindest teilweise auf. Im Gegensatz hierzu unterstützen sich die Wirbelringe in ihrer Wirkung gegenseitig. Es ist zu vermuten, daß diese Schwierigkeit grundsätzlich an dem Ansatz von Quellen auf einer zylindrischen Wand liegt.

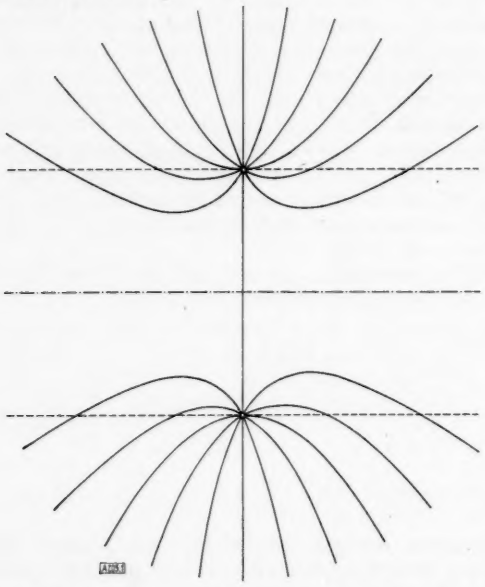


Bild 1. Stromlinienbild eines Quellringes (nach E. Trefftz, a. a. O.[2]), S. 25).

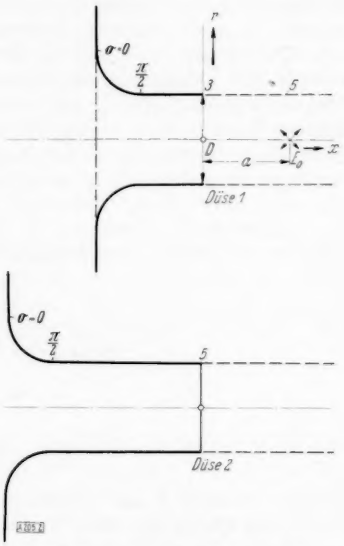


Bild 2. Untersuchte Düsenformen.

Auf Grund dieser Erkenntnisse haben wir die Annahme einer zylindrischen Kanalwand aufgegeben und folgende Form des festen Kanals unseren Rechnungen zugrunde gelegt: Nach einem kurzen zylindrischen Stutzen erweitert sich der Kanal und geht in eine zur Achse senkrechte Wand über (Bild 2). Wir behandeln also den Ausfluß aus einer Druckkammer mit Stutzen. Für einen auf der senkrechten Wand liegenden Quellring ist diese Stromlinie, so daß sich benachbarte Quellen dort nicht beeinflussen.

Damit sind die oben angegebenen Schwierigkeiten umgangen. — An Stelle der Parallelströmung im zylindrischen Kanal tritt jetzt allerdings eine kompliziertere Grundströmung. Aus den Rechnungen von E. Trefftz [3]) geht jedoch hervor, daß sich im Stutzen alsbald eine Strömung herausbildet, die mit genügender Genauigkeit als Parallelströmung angesehen werden kann.

II. Aufstellung der Integralgleichung.

1. Berechnung des Kernes der Integralgleichung. Wir belegen die Oberfläche des Freistrahls mit Wirbelringen und die feste Wand der Düse mit Quellringen, deren Achse in der Kanalachse liegt. Wirbelstärke und Quellergiebigkeit sind auf einem solchen Ring konstant. Wir brauchen zunächst das Geschwindigkeitsfeld dieser Quell- und Wirbelringe. Es sei x die Koordinate längs der Kanalachse mit dem Nullpunkt in der Mündung der Düse und r die radial gerichtete Koordinate, u und v die Komponenten der induzierten Geschwindigkeit in diesen Richtungen.

[2]) vgl. E. Trefftz: Über die Kontraktion kreisförmiger Flüssigkeitsstrahlen. Diss. Straßburg 1913 und Z. f. Math. und Phys. Bd. 64 (1916) S. 34 bis 61.

[3]) a. a. O. [2]).

Ein Quellring im Punkte $(x'; r')$ mit der Ergiebigkeit q je Längeneinheit ruft dann im Punkte $(x; r)$ folgende Geschwindigkeiten hervor (gesamte Ergiebigkeit $E = 2\pi r' \cdot q$):

$$u = \frac{q}{2\pi} \frac{2(x-x')\cdot r'}{[(x-x')^2+(r-r')^2]\sqrt{(x-x')^2+(r+r')^2}} \cdot \mathsf{E}(k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$v = \frac{q}{2\pi} \frac{r'}{r\sqrt{(x-x')^2+(r+r')^2}} \left[\mathsf{K}(k) - \left\{ 1 - \frac{2r(r-r')}{(x-x')^2+(r-r')^2} \right\} \mathsf{E}(k) \right] \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Dabei sind E und K vollständige elliptische Integrale mit dem Argument:

$$k = \frac{2\sqrt{r\,r'}}{\sqrt{(x-x')^2+(r+r')^2}}.$$

Für einen Wirbelring mit der Wirbelstärke γ ergibt sich entsprechend mit demselben k:

$$u = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(r+r')^2}} \left[\mathsf{K}(k) - \left\{ 1 + \frac{2r'(r-r')}{(x-x')^2+(r-r')^2} \right\} \mathsf{E}(k) \right] \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

$$v = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{-(x-x')}{r\sqrt{(x-x')^2+(r+r')^2}} \left[\mathsf{K}(k) - \left\{ 1 + \frac{2r\,r'}{(x-x')^2+(r-r')^2} \right\} \mathsf{E}(k) \right] \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Für unser Problem brauchen wir nun die Kenntnis dieser Geschwindigkeiten nur auf der gegebenen Berandung. Diese setzt sich zusammen aus der zur Achse senkrechten Wand, dem Einlauf (der im Längsschnitt aus zwei Viertelkreisen vom Radius $\varrho \cdot \frac{D}{2}$ besteht) und dem zylindrischen Stutzen und Freistrahl vom Durchmesser D. Es ist zweckmäßig, statt der beiden Koordinaten $x; r$ bzw. $x'; r'$ für den Aufpunkt bzw. den laufenden Punkt die mit $D/2$ dimensionslos gemachte Bogenlänge σ bzw. σ' längs der Berandung einzuführen (siehe Bild 2). Der Nullpunkt von σ wird in den Punkt gelegt, wo die senkrechte Wand in den Einlauf übergeht. Dieser habe die Koordinaten

$$\frac{2x}{D} = -c,$$

$$\frac{2r}{D} = 1 + \varrho.$$

Die Berandung wird dann durch folgende Beziehungen festgelegt:

I. Senkrechte Wand:

$$-\infty \leq \sigma \leq 0: \quad \left.\begin{aligned} \frac{2x}{D} &= -c \\ \frac{2r}{D} &= 1 + \varrho - \sigma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

II. Einlauf:

$$0 \leq \sigma \leq \frac{\pi\varrho}{2}: \quad \left.\begin{aligned} \frac{2x}{D} &= \varrho\left(1 - \cos\frac{\sigma}{\varrho}\right) - c \\ \frac{2r}{D} &= 1 + \varrho\left(1 - \sin\frac{\sigma}{\varrho}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

III. Stutzen und Freistrahl:

$$\frac{\pi\varrho}{2} \leq \sigma \leq +\infty: \quad \left.\begin{aligned} \frac{2x}{D} &= \sigma - s \\ \frac{2r}{D} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

wobei $\varrho\,((\pi/2) - 1) + c = s$ gesetzt ist.

In dem Bereich $-\infty \leq \sigma \leq s$ ist die Berandung mit Quellringen belegt, im Bereich $s \leq \sigma \leq +\infty$ mit Wirbelringen. In dem ersten Bereich soll die Berandung Stromlinie werden und eine feste Wand darstellen, im zweiten Bereich dagegen Potentiallinie und Begrenzung des Freistrahls, auf der verlangt wird, daß keine zusätzliche axial gerichtete Geschwindigkeit auftritt. In dem ersten Bereich soll durch die Belegung die Komponente senkrecht zur Begrenzung der durch einen Widerstandskörper hervorgerufenen Geschwindigkeit sowie die durch die Belegung selbst erzeugte normal gerichtete Geschwindigkeit kompensiert werden; im zweiten Bereich gilt das Entsprechende für die Axialkomponenten der Geschwindigkeiten. Die durch den störenden Körper hervorgerufenen Geschwindigkeiten sollen später betrachtet werden. Die durch die Belegung selbst induzierten Geschwindigkeiten erhalten wir durch Einsetzen der Koordinatenbeziehungen (6), (7) und (8) in die Gl. (2) bis (5). Eine Integration über σ' von $\sigma' = -\infty$ bis $\sigma' = +\infty$ verschafft uns dann die gesamte, von allen Quellringen und Wirbelringen induzierte Geschwindigkeit für jeden Aufpunkt σ. Wir wollen die Kerne

dieser Integrale nicht alle hinschreiben. Es sind insgesamt 16 verschiedene Kerne, nämlich in jedem der vier Gebiete — senkrechte Wand, Einlauf, Stutzen, Freistrahl — der Einfluß auf sich selbst und die der übrigen drei Gebiete. Man kann sich die Kerne leicht selbst ausrechnen. Wesentliche Umformungen wurden bis auf wenige Ausnahmen, die wir noch besprechen wollen, nicht gemacht, da sie die numerische Rechnung nicht vereinfachen würden.

Besonders betrachten wollen wir zunächst den Einfluß der Quellringe der senkrechten Wand auf sich selbst. Wir brauchen dort die axial gerichtete Geschwindigkeit u, die sich nach (2) unter Benutzung von (6) bestimmt. Nach (6) ist $x = x' = -\frac{D}{2} \cdot c = \text{konst.}$, also $x - x' = 0$. Damit ist nach (2) dieser Anteil an der Normalgeschwindigkeit gleich Null in dem ganzen Gebiet $-\infty = \sigma = 0$. Die Quellringe der senkrechten Wand rufen an der Wand selbst keine normal gerichteten Geschwindigkeiten hervor, ein Ergebnis, das durch die Anschauung unmittelbar bestätigt wird.

Als nächstes wollen wir das Gebiet $0 \leq \sigma \leq \pi\,\varrho/2$, den Einlauf, untersuchen. Hier müssen wir die gewünschte Normalkomponente w der Geschwindigkeit aus u und v zusammensetzen:

$$w = u \cdot \cos\frac{\sigma}{\varrho} + v \cdot \sin\frac{\sigma}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Besondere numerische Schwierigkeiten macht die Berechnung des Einflusses der Quellringe dieses Gebietes auf sich selbst. Wie man vermuten konnte, lösten sich diese Schwierigkeiten durch Umformung des Kernes unter wesentlicher Benutzung der Tatsache, daß $r(x)$ ein Kreis ist, Formel (7). Durch Einsetzen von (7) in (2) und (3) unter Anwendung von (9) erhalten wir von den Quellen dieses Gebietes her den Geschwindigkeitsanteil:

$$w'(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi\varrho}{2}} q(\sigma') \cdot$$

$$\left\{ \frac{2\left(-\cos\frac{\sigma}{\varrho}+\cos\frac{\sigma'}{\varrho}\right)\left(1+\varrho\left[1-\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right]\right)\mathbf{E}(k)\cdot\cos\frac{\sigma}{\varrho}}{\varrho\left[\left(-\cos\frac{\sigma}{\varrho}+\cos\frac{\sigma'}{\varrho}\right)^2+\left(-\sin\frac{\sigma}{\varrho}+\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right)^2\right]\sqrt{\varrho^2\left(-\cos\frac{\sigma}{\varrho}+\cos\frac{\sigma'}{\varrho}\right)^2+\left(2+2\varrho-\varrho\left[\sin\frac{\sigma}{\varrho}+\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right]\right)^2}} \right.$$

$$+\frac{\left(1+\varrho\left[1-\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right]\right)\sin\frac{\sigma}{\varrho}}{\left(1+\varrho\left[1-\sin\frac{\sigma}{\varrho}\right]\right)\sqrt{\varrho^2\left(-\cos\frac{\sigma}{\varrho}+\cos\frac{\sigma'}{\varrho}\right)^2+\left(2+2\varrho-\varrho\left[\sin\frac{\sigma}{\varrho}+\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right]\right)^2}}$$

$$\left. \left[\mathbf{K}(k)-\left\{1-\frac{2\left(1+\varrho\left[1-\sin\frac{\sigma}{\varrho}\right]\right)\left(-\sin\frac{\sigma}{\varrho}+\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right)}{\varrho\left[\left(-\cos\frac{\sigma}{\varrho}+\cos\frac{\sigma'}{\varrho}\right)^2+\left(-\sin\frac{\sigma}{\varrho}+\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right)^2\right]}\right\}\mathbf{E}(k)\right] \right\} \mathrm{d}\sigma'$$

mit

$$k = \frac{2\sqrt{\left(1+\varrho\left[1-\sin\frac{\sigma}{\varrho}\right]\right)\left(1+\varrho\left[1-\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right]\right)}}{\sqrt{\varrho^2\left(-\cos\frac{\sigma}{\varrho}+\cos\frac{\sigma'}{\varrho}\right)^2+\left(2+2\varrho-\varrho\left[\sin\frac{\sigma}{\varrho}+\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right]\right)^2}}.$$

Der Kern läßt sich in dieser Form sehr schlecht numerisch auswerten, besonders in der Nähe der Stelle $\sigma = \sigma'$. Man kann ihn jedoch umformen, so daß sich ergibt:

$$w'(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi\varrho}{2}} q(\sigma')\,\frac{1+\varrho\left[1-\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right]}{1+\varrho\left[1-\sin\frac{\sigma}{\varrho}\right]} \cdot \frac{\mathbf{K}(k)\cdot\sin\frac{\sigma}{\varrho}-2\mathbf{E}(k)}{\sqrt{\varrho^2\left(-\cos\frac{\sigma}{\varrho}+\cos\frac{\sigma'}{\varrho}\right)^2+\left(2+2\varrho-\varrho\left[\sin\frac{\sigma}{\varrho}+\sin\frac{\sigma'}{\varrho}\right]\right)^2}}\,\mathrm{d}\sigma' \quad (10)$$

(k wie oben). In dieser Form ist der Kern numerisch zu gebrauchen.

Bei den übrigen Kernen sind Umformungen im allgemeinen nicht nötig. Nur in einigen Fällen empfiehlt es sich, von der bekannten Beziehung

$$\mathbf{K} = \mathbf{E} + k^2 \cdot \mathbf{D}$$

Gebrauch zu machen, um bei der numerischen Auswertung nicht mit kleinen Differenzen nahezu gleicher großer Zahlen rechnen zu müssen.

Schließlich möchten wir noch die Formeln für die induzierten Geschwindigkeiten im Stutzen und Freistrahl hinschreiben, die von den Quellen und Wirbeln in diesen Gebieten herrühren, da man sie vielleicht auch anderweitig verwenden kann.

Die Quellringe im Stutzen induzieren im Stutzen die Radialgeschwindigkeit

$$v(\sigma)_{\frac{2r}{D}=1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi\varrho}{2}}^{s} q(\sigma')\,\frac{1}{\sqrt{(\sigma-\sigma')^2+4}}\,[\mathbf{K}(k)-\mathbf{E}(k)]\,\mathrm{d}\sigma' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die Wirbelringe im Freistrahl induzieren im Stutzen die Radialgeschwindigkeit

$$v(\sigma)_{\frac{2r}{D}=1} = \frac{1}{2\pi}\int_{s}^{+\infty} \gamma(\sigma')\,\frac{\sigma-\sigma'}{\sqrt{(\sigma-\sigma')^2+4}}\left[\mathbf{K}(k)-\left\{1+\frac{2}{(\sigma-\sigma')^2}\right\}\mathbf{E}(k)\right]\mathrm{d}\sigma' \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Die Quellringe im Stutzen induzieren im Freistrahl die Axialgeschwindigkeit

$$u(\sigma)_{\frac{2r}{D}=1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi\varrho}{2}}^{s} q(\sigma')\,\frac{2}{(\sigma-\sigma')\sqrt{(\sigma-\sigma')^2+4}}\,\mathbf{E}(k)\,\mathrm{d}\sigma' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Die Wirbelringe im Freistrahl induzieren im Freistrahl die Axialgeschwindigkeit

$$u(\sigma)_{\frac{2r}{D}=1} = \frac{1}{2\pi}\int_{s}^{+\infty} \gamma(\sigma')\,\frac{-1}{\sqrt{(\sigma-\sigma')^2+4}}\,[\mathbf{K}(k)-\mathbf{E}(k)]\,\mathrm{d}\sigma' \quad \text{(vgl. (11)!)} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Dabei ist in allen Fällen:

$$k = \frac{2}{\sqrt{(\sigma-\sigma')^2+4}}.$$

Damit können wir diese Betrachtungen abschließen. — Zusammenfassend können wir die durch die Belegung selbst auf der Berandung hervorgerufenen Geschwindigkeiten schreiben:

$$w(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\sigma')\,K(\sigma,\sigma')\,\mathrm{d}\sigma' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Dabei ist:

$$w(\sigma) = \begin{cases} u(\sigma) & \text{für } -\infty \le \sigma \le 0 \\ u(\sigma)\cdot\cos\dfrac{\sigma}{\varrho} + v(\sigma)\sin\dfrac{\sigma}{\varrho} & \text{für } 0 \le \sigma \le \dfrac{\pi\varrho}{2} \\ v(\sigma) & \text{für } \dfrac{\pi\varrho}{2} \le \sigma \le s \\ u(\sigma) & \text{für } s \le \sigma \le +\infty \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} q(\sigma) & \text{für } -\infty \le \sigma \le s \\ \gamma(\sigma) & \text{für } s \le \sigma \le +\infty. \end{cases}$$

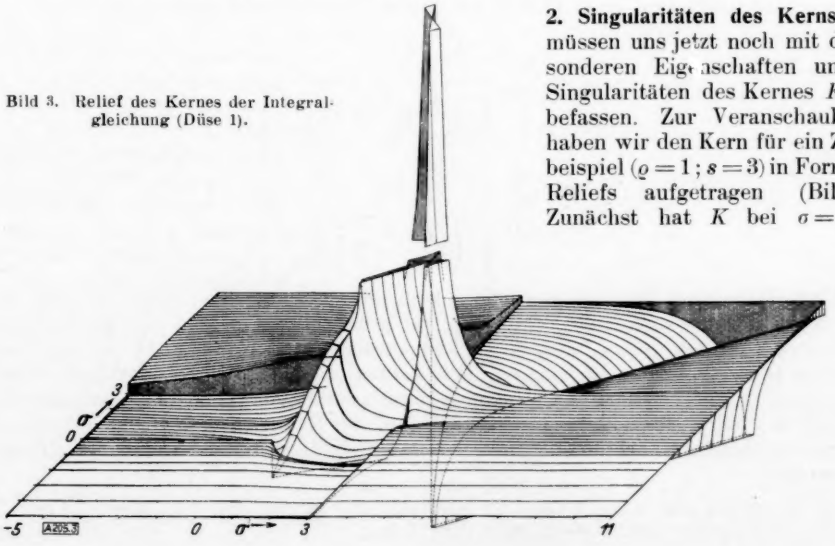


Bild 3. Relief des Kernes der Integralgleichung (Düse 1).

2. Singularitäten des Kerns. Wir müssen uns jetzt noch mit den besonderen Eigenschaften und den Singularitäten des Kernes $K(\sigma, \sigma')$ befassen. Zur Veranschaulichung haben wir den Kern für ein Zahlenbeispiel ($\varrho = 1$; $s = 3$) in Form eines Reliefs aufgetragen (Bild 3). Zunächst hat K bei $\sigma = s$ und

$\sigma' = s$ eine Sprungstelle. Außerdem hat der Kern an dieser Stelle eine unangenehme Singularität. Betrachten wir zunächst die von den Quellringen des Stutzens in den Punkten des Freistrahls induzierte Axialgeschwindigkeit (Formel (13)). Im allgemeinen ist hier $\sigma = \sigma'$ ausgeschlossen, da $s \leq \sigma \leq +\infty$ und $\pi\varrho/2 \leq \sigma' \leq s$ ist. Eine Ausnahme bildet jedoch die Stelle $\sigma = \sigma' = s$, wo $k \to 1$, $\mathbf{E}(k) \to 1$ geht und im Nenner $\sigma - \sigma'$ stehenbleibt[4]). Damit das Integral an dieser Stelle existiert, muß $q(\sigma') = \mu(\sigma')$ gegen Null gehen. Diese Forderung ist in der Einleitung bereits ausführlich diskutiert. Genau entsprechend liegen die Tatsachen bei der von den Wirbelringen des Freistrahls im Stutzen induzierten Radialgeschwindigkeit bei $\sigma = \sigma' = s$ (Formel (12)). Im Reliefbild sind diese Stellen durch die besonders hohen Spitzen gekennzeichnet.

Wesentlich weniger unangenehm sind die Singularitäten, die bei den Gl. (10), (11) und (14) auftreten. Hier ist bei $\sigma = \sigma'$ wieder $k = 1$ und der Kern wird wegen $\mathbf{K}$ logarithmisch unendlich wie

$$\ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Rechentechnisch läßt sich diese Singularität am einfachsten behandeln, indem man das Quadrat des Abstandes von der Stelle $\sigma = \sigma'$ als neue Veränderliche einführt[5]). Im Reliefbild werden diese Stellen durch die schräg bei $\sigma = \sigma'$ durch das Bild laufende Erhebung oder Senke veranschaulicht. Hätten wir noch den unendlich langen zylindrischen festen Kanal, so würde diese Erhebung auch bei negativen σ und σ' immer weiter laufen, nun aber bricht sie durch die neue Kanalform im Gebiet des Einlaufs ab und für negative σ und σ' ist der Kern überhaupt identisch Null.

Schließlich erwähnen wir noch, daß in (15) über σ' von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert wird. Schwierigkeiten treten dabei nicht auf, da sowohl μ wie K genügend stark abnehmen. Auch hier wendet man am zweckmäßigsten das eben angegebene Verfahren an. — Damit sind die durch die Belegung selbst hervorgerufenen Geschwindigkeiten bestimmt.

3. Die Störungsfunktion. Aufgabe der Belegung ist es nun, die durch einen im Freistrahl befindlichen Körper auf der Berandung erzeugten Tangential- bzw. Normalgeschwindigkeiten w_0 zu kompensieren. w_0 setzt sich aus u_0 und v_0 entsprechend (16) zusammen. Wir erhalten also die Integralgleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\sigma')\, K(\sigma, \sigma')\, \mathrm{d}\sigma' - \frac{1}{2}\mu(\sigma) = -w_0(\sigma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17),$$

eine Gleichung, welche für jedes σ erfüllt sein muß. Es handelt sich um eine Integralgleichung zweiter Art, die durch Iteration gelöst werden kann, da sie gestattet, aus einer Näherung $\mu^{(m)}$ durch Berechnung von $w(\mu^{(m)})$ nach (15) bei bekanntem w_0 ein neues $\mu^{(m+1)}$ zu bestimmen.

Wir haben als störenden Körper zunächst einen durch eine Quelle der Ergiebigkeit E_0 in einer Parallelströmung erzeugten Halbkörper genommen. Die Quelle liege auf der Achse im Abstand $x = a$ von der Düsenmündung. Quellsenkenkörper erhalten wir dann durch Überlagerung einer Quelle in $x = a$ und einer Senke in $x = a + l$ in einer Parallelströmung. Die Störungsgeschwindigkeiten einer Quelle der Ergiebigkeit E_0 sind gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \frac{E_0}{\pi D^2} \cdot \frac{2\dfrac{x-a}{D}}{\sqrt{\left(2\dfrac{x-a}{D}\right)^2 + \left(2\dfrac{r}{D}\right)^2}^3} \\ v_0 &= \frac{E_0}{\pi D^2} \cdot \frac{2\dfrac{r}{D}}{\sqrt{\left(2\dfrac{x-a}{D}\right)^2 + \left(2\dfrac{r}{D}\right)^2}^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Durch Umrechnung auf die Veränderliche σ kann daraus unter Beachtung von (16) $w_0(\sigma)$ bestimmt werden. Unsere Aufgabe ist es nun, für gegebenes $w_0(\sigma)$ aus (17) die Belegung $\mu(\sigma)$ zu berechnen. Ist $\mu(\sigma)$ dann bekannt, so können wir aus den Gl. (2) bis (5) das Geschwindigkeitsfeld dieser Belegung bestimmen. Wir kennen dann die bei Anwesenheit eines Widerstandskörpers durch die Düse und die freien Strahlgrenzen hervorgerufene Zusatzgeschwindigkeit in jedem Punkte des Kanals, insbesondere auf der Kanalachse. Für die letzteren ergeben sich übrigens einfache Gleichungen. Die Zusatzgeschwindigkeiten der Quellringe auf der Achse $r = 0$ werden:

[4]) Es handelt sich nicht um ein Integral mit Hauptwert, da σ' nur von einer Seite gegen $\sigma = s$ geht.

[5]) Vgl. F. Vandrey: Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 355.

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} q(x')\,\frac{\pi(x-x')\,r'}{\sqrt{(x-x')^2+r'^2}^3}\,\mathrm{d}\,x' \\ v(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Für die Zusatzgeschwindigkeiten der Wirbelringe auf der Achse $r=0$ erhält man:

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \gamma(x')\,\frac{\pi\,r'^2}{\sqrt{(\pi-x')^2+r'^2}^3}\,\mathrm{d}\,x' \\ v(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

III. Ergebnisse.

1. Die Singularitätsbelegungen des Randes. Wir haben nun einige Zahlenbeispiele durchgerechnet und zwar zwei verschiedene Längen des Stutzens, um dessen Einfluß festzustellen, und zwei verschiedene Lagen der störenden Quelle, um die Möglichkeit zu haben, durch Überlagerung auch einen Quellsenkenkörper als Widerstandskörper zu erhalten. In allen Fällen ist $\varrho=1$ gesetzt, d. h. die Öffnung in der senkrechten Wand hat den doppelten Durchmesser wie der Stutzen und der Freistrahl. In dem einen Beispiel (in der Rechnung mit Düse 1 bezeichnet) ist die Länge des Stutzens $(3-\pi/2)\cdot(D/2)=1{,}4292\cdot\frac{D}{2}$ und damit $c=2{,}4292$; $s=3$, in dem anderen (in der Rechnung mit Düse 2 bezeichnet) ist die Länge des Stutzens $(5-\pi/2)\frac{D}{2}$ $=3{,}4292\cdot(D/2)$ und damit $c=4{,}4292$; $s=5$ (siehe Bild 2). Als Abstand der störenden Quelle von der Mündung der Düse wurde $a=D/2$ und $a=D$ gewählt. – Die Hauptrechenarbeit bestand in der numerischen Auswertung des Kerns der Integralgleichung. Für das Beispiel Düse 1 ist der Kern in Bild 3 aufgetragen und im vorigen Abschnitt bereits besprochen. Da viele dieser Rechnungen möglicherweise auch bei anderen Gelegenheiten gebraucht werden können (so z. B. das Geschwindigkeitsfeld eines Quellringes und das eines Wirbelringes), ist beabsichtigt, die auftretenden Funktionen, die sich im wesentlichen aus elliptischen Integralen zusammensetzen, in einer besonderen Arbeit in Tabellenform zu bringen. — Die Integralgleichung (17) wurde durch Iteration gelöst, und zwar wurde im allgemeinen als Ausgangsnäherung für die Belegung auf der festen Wand das Doppelte von w_0 und auf dem Freistrahl w_0 selbst genommen.

In Bild 4 sind die Belegungen μ für 4 Zahlenbeispiele über σ aufgetragen[6]). In dem untersten Bild haben wir durch Überlagerung der zu einer Quelle im Abstand $a=D/2$ von der Düsenmündung (Beispiel 1) und der zu einer Senke im Abstand $a=D$ (Beispiel 2 mit entgegengesetzten Vorzeichen) gehörigen Belegungen die Belegung eingetragen, die von einem Quellsenkenkörper hervorge-

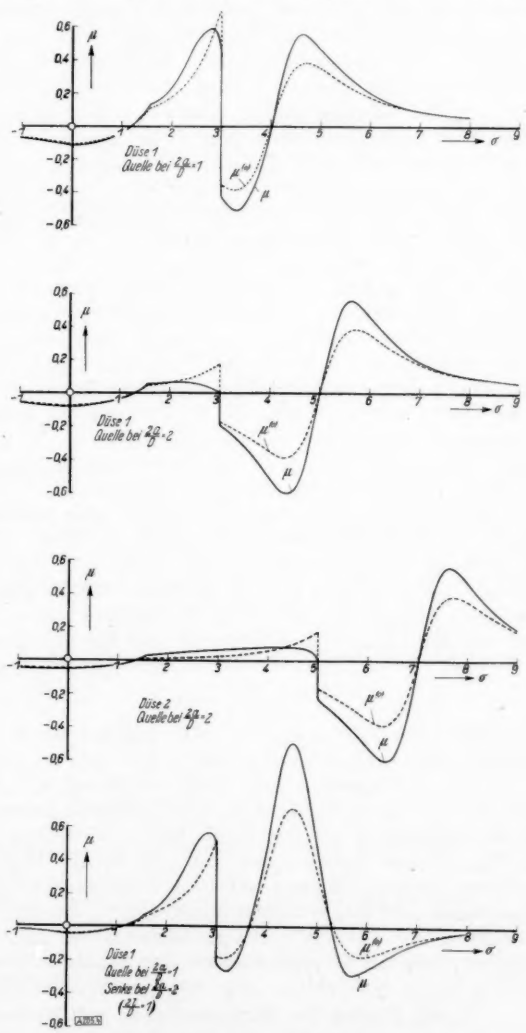


Bild 4. Belegungsfunktionen für 4 Zahlenbeispiele. Die Ausgangsnäherung ist gestrichelt eingetragen.

[6]) In den Bildern 4 und 5 ist μ mit $E_0/\pi D^2$ dimensionslos gemacht, jedoch die alte Bezeichnung μ beibehalten.

rufen wird. Man kann erkennen, in welcher Weise die endgültige Belegung von der Ausgangsnäherung (gestrichelt eingetragen), abweicht.

Die Konvergenz des Iterationsverfahrens ist gut. Nur in der Nähe der Übergangsstelle wurde bis zur fünften Näherung gerechnet. Es zeigte sich jedoch keine Divergenz des Verfahrens, wie schon im ersten Abschnitt angekündigt wurde. Der Wert von μ bei $\varrho = s$ wurde nicht berechnet, sondern immer zu Null angenommen. Für große positive und negative σ fällt die endgültige Belegung praktisch mit der Ausgangsnäherung zusammen. Um die Belegungen besser miteinander vergleichen zu können, sind die ersten drei Beispiele gemeinsam in Bild 5 über den Abstand von der störenden Quelle aufgetragen und zum Vergleich dazu die Belegung, die die Quelle auf einem unendlich langen zylindrischen Freistrahl hervorruft.

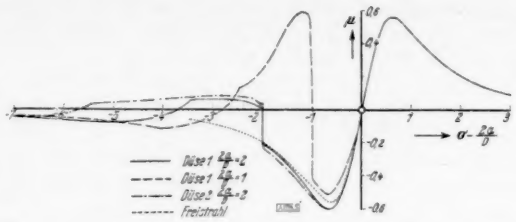


Bild 5. Belegungsfunktionen für 3 Zahlenbeispiele als Funktion des Abstandes von der Quelle. Zum Vergleich ist die Belegungsfunktion für einen Freistrahl ohne Düse eingetragen.

Bemerkenswert ist besonders, daß sich sämtliche Belegungen rechts von der Quelle nicht merklich von der Freistrahlbelegung unterscheiden. Bis dahin reicht der Einfluß der Düse augenscheinlich nicht. Auch eine Änderung der Stutzenlängen macht in der Nähe der störenden Quelle nicht viel aus. Auffallend ist jedoch die starke Zunahme der Quellstärke in der Nähe der Düsenmündung, wenn die störende Quelle näher an die Düse rückt.

2. Die Zusatzströmung. Um eine anschauliche Vorstellung von der durch die Belegung hervorgerufenen Zusatzströmung zu bekommen, ist im Bild 6 das Stromlinienbild der Zusatzströmung für ein Beispiel (Düse 1 ; $2a/D = 2$) gezeichnet. Es ist an diesem Bild bemerkenswert, daß die Zusatzströmung in unmittelbarer Nähe der störenden Quelle auf der Achse einen Staupunkt besitzt. Bild 6 zeigt außerdem das Stromlinienbild für Zusatzströmung und Quellströmung zusammen. Man sieht, daß die Bedingung, daß der Freistrahlrand Potentiallinie ist, recht gut erfüllt ist. An der Übergangsstelle $\sigma = s$ oder in deren Nähe auf der Begrenzung des freien Strahls ergibt sich ein Staupunkt. Damit die Strömung physikalisch sinnvoll wird, ist zu erwarten, daß dieser genau bei $\sigma = s$ liegt, denn sonst ergibt sich zwischen dem Staupunkt und der Übergangsstelle eine nach innen gerichtete Strömung, welche die feste Wand an der Übergangsstelle mit unendlich hoher Geschwindigkeit umfließt. Wie die Verhältnisse an dieser Stelle wirklich liegen, und welche Lösung die gestellte Potentialaufgabe in diesem Gebiet genau hat, konnte durch numerische Rechnung nicht festgestellt werden. Es bedarf dazu einer genaueren Untersuchung der Übergangsstelle. In unserem Zahlenbeispiel lag der Staupunkt nicht genau bei $\sigma = s$. Da die Rechnung jedoch in diesem Gebiet nicht so genau durchgeführt werden konnte, um derartige Abweichungen zu garantieren, haben wir in Bild 6 das Stromlinienbild so abgeändert, daß sich eine physikalische sinnvolle Strömung mit dem Staupunkt an der Übergangsstelle ergibt. Weiter im Stutzen ist der gewünschte Strömungsverlauf wieder gut erfüllt. Es ergibt sich im Stutzen praktisch eine negativ gerichtete Parallelströmung von kleinem Betrage. Schließlich haben wir in Bild 7 das Stromlinienbild der Gesamtströmung um einen Halbkörper vor uns. Wir haben die Geschwindigkeit U der Parallelströmung so gewählt, daß sich für den Durchmesser d des Halbkörpers nach

$$d = 2\sqrt{\frac{E_0}{\pi U}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

der Wert $d = 0.707\, D$ ergibt. Wir wählten einen solchen dicken Körper, damit die an sich kleinen Änderungen im Stromlinienbild gut herauskommen. Da wir diese Strömung durch einfache Überlagerung von Zusatzströmung, Quellströmung und Parallelströmung erhalten, können wir durch Umkehrung der Parallelströmung außer dem Ausfluß aus einer Düse gegen einen Halbkörper (oberes Bild) auch die Strömung um einen Halbkörper im Freistrahl mit Auffangtrichter konstruieren (unteres Bild). Wie die Strömung weiter hinten im Auffangtrichter verläuft, können wir der besonderen Form der festen Wand wegen jedoch nicht feststellen. — Beide Stromlinienbilder unterscheiden sich nicht viel von der ungestörten Strömung in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit (gestrichelt eingetragen). Insbesondere machen sich die Besonderheiten der Zusatzströmung in der Umgebung der Übergangsstelle ($\sigma = s$) kaum bemerkbar. Der Staupunkt am Halbkörper ist etwas nach hinten verschoben.

3. Der Einfluß der Zusatzströmung auf Widerstandsmessungen. Damit kommen wir auf die Wirkungen, welche eine durch Düse und Freistrahl abgeänderte Strömung auf einen Widerstandskörper ausübt und auf die Frage, in welcher Weise Widerstandsmessungen in

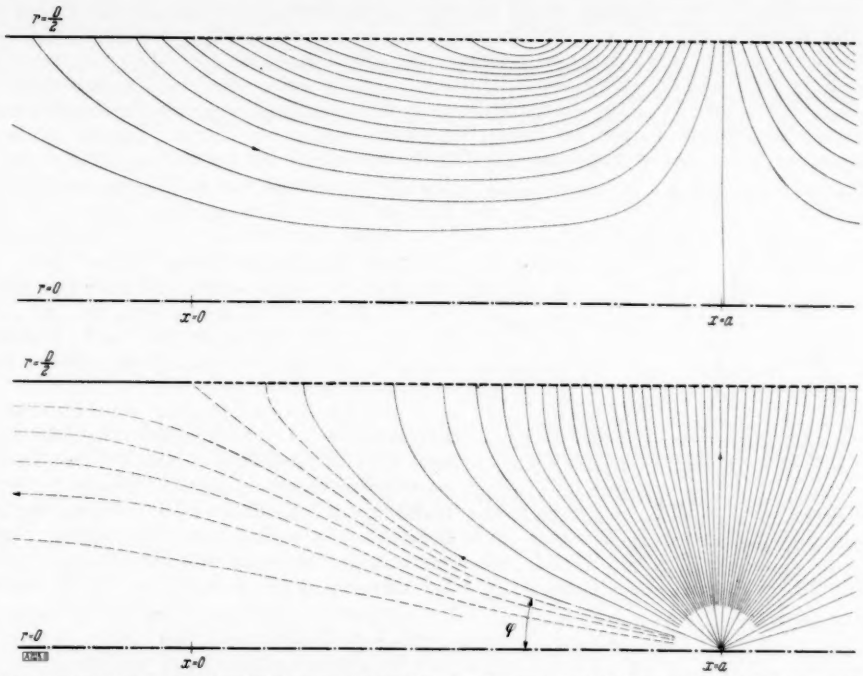


Bild 6. Stromlinienbilder. Oben: Zusatzströmung. Unten: Zusatzströmung + Quellströmung (Düse 1; $2a/D = 2$). Zwischen je zwei benachbarten ausgezogenen Stromlinien strömt 1/50 der Quellflüssigkeit hindurch, zwischen je zwei gestrichelten 1/400.

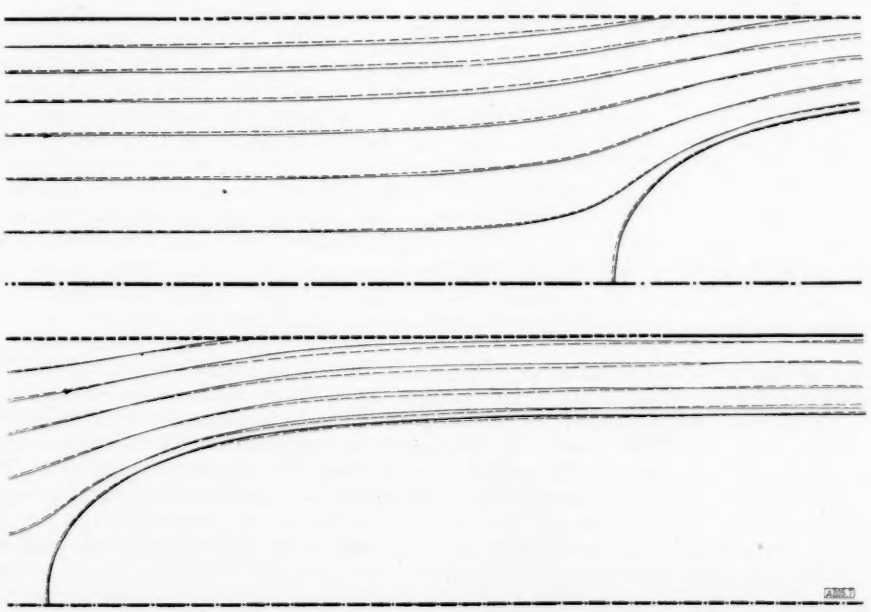


Bild 7. Stromlinienbilder von der Umströmung eines Halbkörpers. Oben: Ausfluß aus einer Düse. Unten: Vor dem Auffangtrichter. Gestrichelt eingetragen ist das Bild in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit (Düse 1; $2a/D = 2$).

einem Windkanal mit freier Meßstrecke eventuell korrigiert werden müssen. Bei einer solchen Messung wird die Kraft W auf den Körper gewogen, die Anströmungsgeschwindigkeit U, bei der diese Kraft auftritt, gemessen und daraus gebildet

$$c_w = \frac{W}{\frac{\varrho}{2} U^2 F},$$

wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit und F eine Bezugsfläche, hier die größte Querschnittsfläche des Körpers, ist.

Zunächst einmal muß bemerkt werden, daß der Körper im Kanal eine andere Druckverteilung besitzt, als in unendlich ausgedehnter Strömung. Man müßte daher diejenige Körperform bestimmen, welche in unendlich ausgedehnter Strömung dieselbe Druckverteilung hat wie der gemessene Körper im Kanal, und hätte dann den Körper, dessen Widerstand man gemessen hat. Diese Änderung der Druckverteilung wird jedoch im wesentlichen von den freien Strahlgrenzen herrühren und nur in ganz geringem Maße von der Düse.

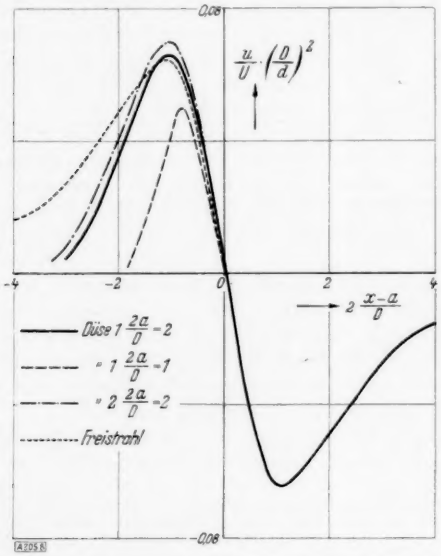


Bild 8. Zusatzgeschwindigkeiten in der Achse als Funktion des Abstandes von der Quelle.

Man sieht dies aus der in Bild 8 gezeigten Geschwindigkeitsverteilung, aus der hervorgeht, daß gerade im hinteren Teil des Körpers, der für den Widerstand maßgebend ist, ein Einfluß der Düse nicht mehr zu erkennen ist. Im Rahmen unserer Aufgabenstellung kann dieser Einfluß außer acht gelassen werden.

Im Zusammenhang mit der Änderung der Körperform ist noch darauf hinzuweisen, daß auch die Bezugsfläche F durch Düse und freie Strahlgrenzen bei endlichen Körpern (nicht beim Halbkörper) geändert wird. Diese Änderung können wir nach den Ergebnissen unserer Rechnung abschätzen: Es ergibt sich eine merkliche Änderung von F von etwa 1 v. H. und mehr bei Quellsenkenkörpern, deren Vorderkante etwa einen Kanalradius von der Düse entfernt ist, erst bei Dickenverhältnissen d/D über 0,5. Auch dieser Einfluß ist fast ausschließlich durch den Freistrahl und nicht durch die Düse bedingt.

Einen Einfluß wird bei allen diesen Überlegungen auch die Deformation des freien Strahls haben, was hier nicht berücksichtigt wurde.

Außer der oben bereits erwähnten Änderung des Widerstands infolge anderer Geschwindigkeitsverteilung und damit anderer Ablösebedingungen kann auch schon in der Potentialströmung ein zusätzlicher Widerstand oder Vortrieb entstehen. Hierzu könnten wir grundsätzlich die bekannte Tatsache [7]) heranziehen, daß eine Quelle der Ergiebigkeit E_0 in einem beliebigen durch Singularitäten hervorgerufenen Geschwindigkeitsfeld die Kraft $-\varrho E_0 u^*$ erfährt, wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit und u^* die Geschwindigkeit am Ort der Quelle bedeutet. In unserem Falle hat aus Symmetriegründen u^* die Richtung der Kanalachse, und wir erhalten auch eine Kraft in Richtung der Kanalachse, den Vortrieb

$$\Delta W = -\varrho E_0 u^* = -\frac{\varrho}{2} U^2 F \cdot 2\frac{u^*}{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22),$$

weil nach der Kontinuitätsbedingung $E_0 = F \cdot U$ ist. Da nun in unmittelbarer Nähe der Quelle ein Staupunkt der Zusatzströmung liegt, wird u^* und damit ΔW immer verhältnismäßig klein sein und liegt innerhalb der Rechenunsicherheit. Genauer können wir ΔW für Quellsenkenkörper auch mit Hilfe einer Impulsbetrachtung bestimmen. Wir benutzen dazu die Tatsache, daß ein Teil der Quellflüssigkeit in den festen Kanal hineinströmt (vgl. Bild 6 unten), wodurch dort eine der Anströmung entgegengesetzte Parallelströmung hervorgerufen wird. Diese habe in der Düse die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ (an anderen Stellen des festen Kanals eine dem veränderten Querschnitt entsprechende). Nach der Kontinuitätsbedingung ist die in die Düse einströmende Quellflüssigkeit

$$\frac{E_0}{2}(1-\cos\varphi) = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \bar{u} \ ,$$

wobei φ der Winkel zwischen der auf den Staupunkt am Düsenende zulaufenden Stromlinie und der Achse am Ort der Quelle ist (siehe Bild 6). Daraus erhalten wir unter Benutzung von (21):

$$\frac{\bar{u}}{U} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)\left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

[7]) Vgl. A. Betz: Singularitätenverfahren zur Ermittlung der Kräfte und Momente auf Körper in Potentialströmung. Ing.-Arch. Bd. 3 (1932), S. 454 bis 462.

Dabei ist φ von der Lage des Widerstandskörpers zur Düse abhängig, also von $2a/D$. In dem gerechneten Beispiel mit Düse 1 ; $2a/d = 2$ ist $\varphi = 14°$, so daß $\bar{u}/U = 0{,}015\,(d/D)^2$ wird. Legen wir nun zwei Kontrollflächen senkrecht zur Achse durch den Stutzen (Geschwindigkeit $u_1 = U - \bar{u}$, Druck p_1, Querschnitt F_1) und weit hinter dem Quellsenkenkörper durch den Freistrahl ($u_2 = U$; p_2; F_2), so liefert der Impulssatz eine zusätzliche Kraft auf den Körper

$$\Delta W = F_1(\varrho u_1^2 + p_1 - p_2) - F_2 \varrho u_2^2 .$$

Diese Beziehung könnten wir mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung und der Kontinuitätsgleichung umformen in

$$\Delta W = \frac{\varrho}{2} F_1 (u_2 - u_1)^2 = \frac{\varrho}{2} \frac{\pi D^2}{4} (u_2 - u_1)^2 .$$

Nun ist $u_2 - u_1$ aber die oben eingeführte Geschwindigkeit $\bar{u}$ und nach (23)

$$\Delta W = \frac{\varrho}{2} U^2 \cdot F \frac{(1 - \cos\varphi)^2}{4} \left(\frac{d}{D}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

In dem Zahlenbeispiel mit $\varphi = 14°$ wird $(1 - \cos\varphi)^2/4 = 0{,}0002$, so daß ΔW wiederum vernachlässigbar klein ist. Befindet sich der Körper näher an der Düse, wird φ größer, was man jedoch in jedem Falle leicht abschätzen kann. —

Schließlich besteht die Möglichkeit, daß die Geschwindigkeit U korrigiert werden müßte. In der Praxis wird die Anströmgeschwindigkeit meist in der Weise bestimmt, daß der statische Druck p_k in der Düsenvorkammer gemessen und daraus durch Umrechnung mittels des Düsenfaktors $1/[1 - (F_d/F_k)^2]$ die Geschwindigkeit U erhalten wird aus:

$$\frac{\varrho}{2} U^2 = \frac{p_k - p_0}{1 - \left(\frac{F_d}{F_k}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

wobei p_0 der Druck im Außenraum, F_k die Querschnittfläche der Düsenvorkammer und $F_d = \pi D^2/4$ der Düsenaustrittsquerschnitt ist. Nach den Voraussetzungen, unter denen diese Beziehung abgeleitet ist, ist U die Geschwindigkeit am Strahlrand, was sich auch durch die Zusatzströmung nicht ändert, da diese an der Düsenmündung auf dem Rande einen Staupunkt hat und so bestimmt ist, daß auf dem Strahlrand keine zusätzliche Axialgeschwindigkeit auftritt. Ist diese Geschwindigkeit auf dem Strahlrand maßgebend für den gemessenen Widerstand, so ist gegen die Messung der Anströmgeschwindigkeit mittels des Düsenfaktors nichts einzuwenden. — Es besteht jedoch die Möglichkeit, daß nicht die Verhältnisse auf dem Strahlrand, sondern die Mittelwerte von Druck und Geschwindigkeit in der Düsenmündung maßgebend sind, eine Geschwindigkeit, die, wie oben gezeigt wurde, um den Betrag $\bar{u}$ nach (23) vermindert ist. Dies würde jedoch nach dem angegebenen Wert für φ den Staudruck erst bei einem Durchmesserverhältnis $d/D = 0.58$ um 1 v. H. ändern. Wir schließen daraus, daß auch ohne Klärung der Frage, welche Geschwindigkeit maßgebend ist, gegen die übliche Methode, den ungestörten Staudruck zu bestimmen, nach unseren Ergebnissen im allgemeinen nichts einzuwenden ist.

Weiterhin ist es möglich, daß die Anströmgeschwindigkeit mittels Staurohr an einer Stelle gemessen wird, an welcher durch die Quell- und Wirbelbelegung noch eine Zusatzgeschwindigkeit u' auftritt. Anstatt die ungestörte Anströmgeschwindigkeit U zu messen, mißt man dann $U + u'$ und muß nachträglich korrigieren.

Den Wert von u' können wir aus unseren Belegungen berechnen. u' setzt sich additiv zusammen aus den entsprechenden Werten der Zusatzströmung und der Quellströmung. Uns interessiert hier zunächst der Anteil, welchen die Zusatzströmung liefert, da man sich den der Quellströmung leicht berechnen kann. In Bild 8 ist daher die Zusatzgeschwindigkeit in der Kanalachse aufgetragen. Man erkennt wieder, daß die Länge des Stutzens keinen großen Einfluß hat, wohl aber die Lage der störenden Quelle. Rechts von der Quelle unterscheiden sich jedoch wie früher die Werte kaum von denen, die man in einem unendlich langen Freistrahl erhalten würde. Der Einfluß der Düse macht sich deutlich in einem Absinken der Werte bemerkbar. In Bild 9 ist die Zusatzgeschwindigkeit in der Strahlachse noch einmal für verschiedene Abstände der störenden Quelle von der Düse aufgetragen. Die Kurven für $2a/D = 0{,}8$; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8 sind dabei linear interpoliert, was sich wohl verantworten läßt, da die lineare Interpolation rechts von der Quelle exakt richtig ist. Um zu sehen, in welcher Weise die Zusatzgeschwindigkeiten im ganzen Windstrom von den Werten auf der Achse abweichen, wurde Bild 10 gezeichnet, allerdings nur für das Zahlenbeispiel mit Düse 1, $2a/D = 2$. Für andere Lagen der störenden Quelle werden die Abweichungen ähnlich sein.

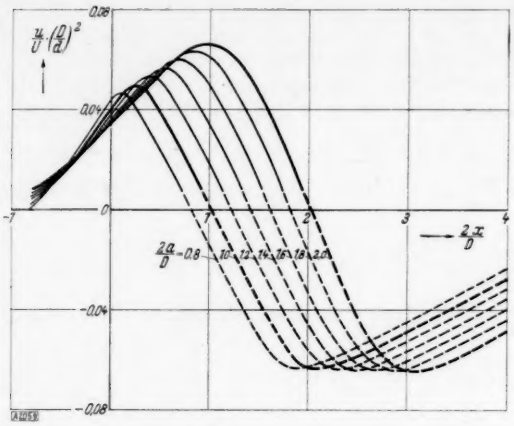
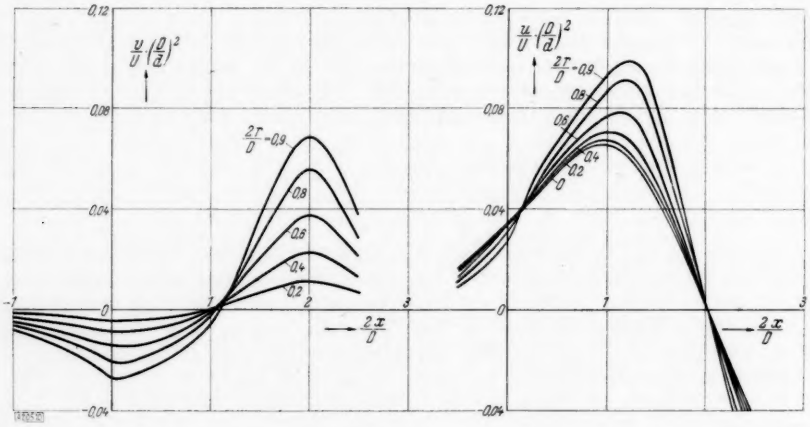


Bild 9 (links). Zusatzgeschwindigkeiten in der Achse als Funktion des Abstandes von der Düse für verschiedene Abstände der Quelle von der Düse. Die dünn ausgezogenen Kurven sind interpoliert (Düse 1).

Bild 10 (unten). Zusatzgeschwindigkeiten als Funktionen des Abstandes von der Düse für verschiedene $2r/D$ (Düse 1; $2a/D = 2$).



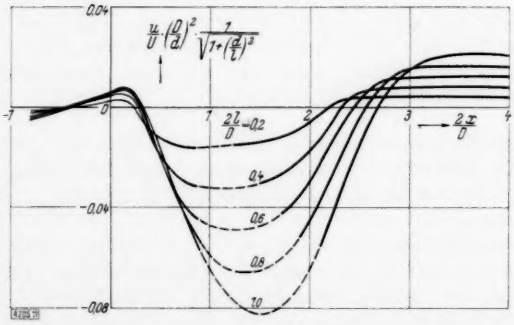


Bild 11. Zusatzgeschwindigkeiten in der Achse als Funktion des Abstandes von der Düse für Quellsenkenkörper verschiedener Schlankheit. Die Quelle liegt bei $2a/D = 1$. Der Abstand $2l/D$ der Senke von der Quelle ist variiert (Düse 1).

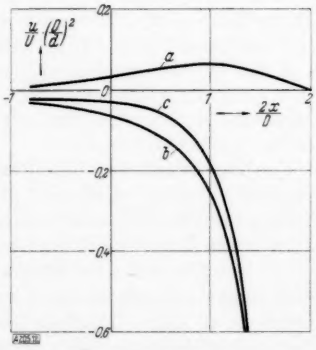


Bild 12. Zusatzgeschwindigkeiten in der Achse. *a* Zusatzströmung. *b* Quellströmung. *c* Zusatzströmung + Quellströmung (Düse 1; $2a/D = 2$).

Schließlich wurden durch Überlagerung von einer Quelle und einer Senke der gleichen Ergiebigkeit E_0 im Abstand l die Zusatzgeschwindigkeiten u in der Kanalachse für Quellsenkenkörper verschiedener Länge gewonnen (Bild 11).

Dabei wurde die Dicke d des Quellsenkenkörpers nach Lamb [8]) aus

[8]) a. a. O. [1]) Formel (2).

$$d^2\sqrt{d^2+l^2}=\frac{4}{\pi}\frac{E_0 l}{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

bestimmt und damit die Geschwindigkeit $E_0/\pi D^2$, mit welcher dimensionslos gemacht wurde, zu

$$\frac{E_0}{\pi D^2}=\frac{1}{4}U\left(\frac{d}{D}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{d}{l}\right)^2}\,.$$

Es ergeben sich, wie Bild 11 zeigt, in der Nähe der Düse bemerkenswert kleine Werte für die Zusatzgeschwindigkeit. Setzen wir beispielsweise $d/D=0{,}5$ und $d/l=1$, so ergibt sich die Zusatzgeschwindigkeit in der Mündung der Düse für den Quellsenkenkörper zu $u=0{,}0025\,U$, während diese für einen Halbkörper derselben Dicke $0{,}01\,U$ beträgt. Im unendlich langen zylindrischen Freistrahl dagegen ergeben sich aus Symmetriegründen die entsprechenden Verhältnisse, wie sie in Bild 11 (für Bild 9 gilt dasselbe) hinter dem Körper vorliegen (der Einfluß der Düse reicht nicht bis dahin), so daß an der entsprechenden Stelle der Achse bei einem Quellsenkenkörper $u=0{,}0056\,U$ ist. Damit haben wir das Geschwindigkeitsfeld der Quell- und Wirbelbelegung bestimmt.

Zu der Geschwindigkeit u' liefert nun auch die Quellströmung einen Anteil, wie oben bemerkt wurde. Dieser übersteigt den der Zusatzströmung im allgemeinen beträchtlich. Um einen Überblick über die Größenordnung zu erhalten, haben wir in Bild 12 die Zusatzgeschwindigkeiten in der Kanalachse für die Zusatzströmung, die Quellströmung und deren Summe für ein Beispiel aufgetragen. Als Wesentlichstes erkennen wir, daß sich trotz Abminderung durch die Zusatzströmung vor dem Körper immer noch ein Stau ausbildet.

Vergleiche mit Messungen konnten leider nicht vorgenommen werden, da Messungen in dieser Hinsicht kaum vorhanden sind. Die einzigen Messungen, bei denen die Anströmgeschwindigkeit mittels Staurohr an verschiedenen Stellen des Kanals gemessen wurde[9]), sind mit kreisförmigen, senkrecht angeblasenen Platten vorgenommen, bei denen die Widerstandsverhältnisse durch Bildung des Totwassers gänzlich andere als die hier angenommen sind. Es ergibt sich nämlich ein mit größeren Durchmessern der Scheiben abnehmendes c_w im Gegensatz zu den Beobachtungen an Luftschiffkörpern[10]), bei denen c_w mit wachsender Dicke des Körpers zunimmt. Es ist jedoch nicht sicher, wieweit diese Erscheinungen durch Herstellungsungenauigkeiten hervorgerufen wurden, so daß ein Vergleich mit unseren Ergebnissen nicht vorgenommen wurde.

Herrn Dr.-Ing. habil. W. Flügge sind wir für die Überlassung seiner Untersuchungen, sowie Frau Dr.-Ing. I. Flügge-Lotz für wertvolle Hinweise bei der Weiterführung der Arbeit zu besonderem Dank verpflichtet. Bei der Leitung der umfangreichen Rechenarbeiten hat uns Fräulein stud. math. I. Multhopp in dankenswerter Weise unterstützt.

IV. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit ist der Einfluß der Düse oder des Auffangtrichters auf Widerstandsmessungen in einem Windkanal mit freier Meßstrecke untersucht. In einem kurzen Bericht werden die versuchten Lösungsmöglichkeiten erörtert, und es wird auf die noch bestehenden mathematischen Probleme hingewiesen. Um mit den bekannten mathematischen Hilfsmitteln zu einer Lösung zu kommen, werden als Düse die Wände einer Druckkammer mit Stutzen gewählt (Bild 2). Zur Erfüllung der Randbedingungen, welche verlangen, daß die durch den Widerstandskörper auf der Kanalwand hervorgerufenen Normalgeschwindigkeiten und die auf der freien Strahlgrenze hervorgerufenen Tangentialgeschwindigkeiten verschwinden müssen, wird die feste Wand mit Quellen und die Strahlgrenze mit Wirbeln belegt. Die Randbedingungen liefern für die Belegung eine Integralgleichung zweiter Art, die durch Iteration numerisch gelöst werden kann. Aus der Belegung wurde dann das Strömungsfeld um Halbkörper und Quellsenkenkörper beliebiger Dicke in verschiedenen Lagen zur Düse berechnet, sowie die Kraft, welche ein solcher Körper in der Zusatzströmung erfährt. Es zeigte sich, daß dieser zusätzliche Widerstand stets sehr klein ist und im allgemeinen unterhalb der Meßgenauigkeit liegt, während das Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung des Körpers durch die Anwesenheit der Kanalwände und freien Strahlgrenzen oft merklich gestört wird. 205

Abgeschlossen März 1940.

[9]) siehe C. Wieselsberger: Widerstandsmessungen im freien Luftstrahl und Kanal. Z. Flugtechn. Bd. 6 (1915), S. 127, oder Mitt. d. AVA Göttingen 1. Folge, S. 54; vgl. auch Handb. d. Exp.-Phys. Bd. IV, S. 249.

[10]) C. Wieselsberger: Ähnlichkeitsuntersuchungen an Ballonmodellen und Versuche über den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit. Mitt. d. AVA, 1. Folge, S. 53.

Über die Minimalsätze der Elastizitätstheorie.

Von *Constantin Weber* in Dresden.

Im folgenden werden die Minimalsätze der Elastizitätstheorie auf möglichst breiter Grundlage abgeleitet und dann nach Einführung gewisser Einschränkungen ihre Anwendung zur Bestimmung elastischer Konstanten dargelegt.

I. Der Extremwert der potentiellen Energie.

Ein belasteter Körper sei im Gleichgewichte. Die Koordinaten eines Punktes des unbelasteten Körpers seien x, y, z, desselben Punktes des belasteten Körpers $\xi = x + u$, $\eta = y + v$, $\zeta = z + w$. Im Teilchen $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ sei infolge der Formänderung die Zerrungsenergie $a\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ aufgespeichert, die von der Endform des Teilchens, nicht aber von der Art der allmählichen Entstehung dieser Endform abhängt. Das Gesetz zwischen der spezifischen Zerrungsenergie a und den Zerrungen (den Größen, die die Formänderung kennzeichnen) sei noch ganz beliebig; es kann auch von Ort zu Ort verschieden sein.

Nun wird dem Körper eine kleine zusätzliche Formänderung erteilt, so daß der Punkt ξ, η, ζ in den Punkt $\xi + \delta u, \eta + \delta v, \zeta + \delta w$ übergeht. Die Verschiebungen δu, δv, δw und ihre Ableitungen können beliebig klein gemacht werden. Im Teilchen $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ ist nunmehr die Zerrungsenergie $(a + \delta a)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ enthalten. δa entsteht dadurch, daß die Seitenflächen des Teilchens $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ sich in verschieden starkem Maße infolge δu, δv, δw verschieben. δa hängt also von den Ableitungen der δu, δv, δw ab. Verschieben wir die Fläche $\xi = \text{const}$ um δu, die Fläche $\xi + \mathrm{d}\xi = \text{const}$ um $\delta u + \dfrac{\partial\,\delta u}{\partial\,\xi}\,\mathrm{d}\xi$, während alle weiteren Verschiebungen des Teilchens null sind, so wird die Formänderungsarbeit $\sigma_\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta \cdot \dfrac{\partial\,\delta u}{\partial\,\xi}\,\mathrm{d}\xi$ in Zerrungsenergie umgesetzt. Folglich wird $\delta a = \sigma_\xi \dfrac{\partial\,\delta u}{\partial\,\xi}$. Verschiebt man die Fläche $\eta = \text{const}$ um δu, die Fläche $\eta + \mathrm{d}\eta = \text{const}$ um $\delta u + \dfrac{\partial\,\delta u}{\partial\,\eta}\,\mathrm{d}\eta$, so wird die zugeführte Formänderungsarbeit $\tau_{\xi\eta}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta \cdot \dfrac{\partial\,\delta u}{\partial\,\eta}\,\mathrm{d}\eta$ in Zerrungsenergie umgesetzt. Man erhält dann $\delta a = \tau_{\xi\eta} \dfrac{\partial\,\delta u}{\partial\,\eta}$. Treten alle möglichen δu, δv, δw auf, so wird

$$\delta a = \sigma_\xi \frac{\partial\,\delta u}{\partial\,\xi} + \cdots + \tau_{\xi\eta}\left(\frac{\partial\,\delta u}{\partial\,\eta} + \frac{\partial\,\delta v}{\partial\,\xi}\right) + \cdots \qquad (1).$$

(Punkte für Glieder, die durch zyklische Vertauschung entstehen.)

Der Zuwachs der Zerrungsenergie A des gesamten Körpers wird

$$\delta A = \int_V\int\int \delta a\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta = \int_V\int\int \left[\sigma_\xi \frac{\partial\,\delta u}{\partial\,\xi} + \cdots + \tau_{\xi\eta}\left(\frac{\partial\,\delta u}{\partial\,\eta} + \frac{\partial\,\delta v}{\partial\,\xi}\right) + \cdots\right] \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta.$$

Durch partielle Integration wird dieses Integral umgeformt. Beachtet man die Gleichgewichtsbedingungen im Inneren: $\dfrac{\partial\,\sigma_\xi}{\partial\,\xi} + \dfrac{\partial\,\tau_{\xi\eta}}{\partial\,\eta} + \dfrac{\partial\,\tau_{\xi\zeta}}{\partial\,\zeta} + X = 0$ und zyklisch, und für das Oberflächenteilchen $\mathrm{d}o$:

$$\Xi\,\mathrm{d}o = \sigma_\xi\,\mathrm{d}o\cos\alpha + \tau_{\xi\eta}\,\mathrm{d}o\cos\beta + \tau_{\xi\zeta}\,\mathrm{d}o\cos\gamma \quad \text{und zyklisch,}$$

worin X, Y, Z die Massenkräfte je Raumeinheit und Ξ, H, Z die Oberflächenkräfte je Flächeneinheit und α, β, γ die Winkel der Flächennormalen mit den Koordinatenachsen sind, so erhält man:

$$\delta A = \int_V\int\int (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta + \int_O (\Xi\,\delta u + H\,\delta v + Z\,\delta w)\,\mathrm{d}o \qquad (2).$$

Bringt man alle Glieder auf die linke Seite, so stellt der gesamte Ausdruck links die Variation der potentiellen Energie dar. Die potentielle Energie wird folglich zum Extremum. Um die Frage zu entscheiden, ob ein stabiles, indifferentes oder labiles Gleichgewicht vorliegt, muß die zweite Variation gebildet werden. Ist diese positiv, die potentielle Energie selbst also ein Minimum, so könnte der variierte Zustand nur durch Hinzuführung von Energie erreicht werden. Das Gleichgewicht ist also ein stabiles.

In dieser weitesten Form dient der Satz vom Extremum der potentiellen Energie als Ausgangspunkt zur Behandlung von Belastungsfällen mit großen Verschiebungen und großen Zerrungen und zur Untersuchung von Stabilitätsfragen.

II. Das Minimum der potentiellen Energie für kleine Zerrungen und Drehungen.

Die Zerrungsenergie im Teilchen $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ ist $a\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$. Bezogen auf das Teilchen $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, erhält man eine andere Zerrungsenergie infolge der Änderung des Rauminhaltes des Teilchens. Der Rauminhalt 1 des unbelasteten Körpers geht über in den Rauminhalt $(1+\varepsilon_V)$ des belasteten Körpers. Die Zerrungsenergie, bezogen auf das unbelastete Teilchen, wird darum $a\,(1+\varepsilon_V)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Die Zerrungsenergie $a\,(1+\varepsilon_V)$ und die Raumdehnung ε_V hängen von den Zerrungen des Teilchens ab, hierdurch also von den Ableitungen nach x, y, z der Verschiebungen u, v, w. Von diesen neun Ableitungen bestimmen drei (für unsere Untersuchung nicht wichtige) Ausdrücke die Drehung des Teilchens, während die sechs Ausdrücke ε_{xx} und zyklisch, ε_{xy} und zyklisch die Zerrungen geben. Diese Zerrungen sind[1]):

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \quad \text{und zyklisch,}$$

$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] \quad \text{und zyklisch.}$$

Die Zerrungsenergie a und die Raumdehnung ε_V sind Funktionen dieser sechs Zerrungen; die erstere hängt von den Werkstoffeigenschaften des Körpers ab. Bei homogenen Körpern müßte diese Funktion für alle Stellen x, y, z dieselbe sein; für isotrope Körper müßte a eine Funktion der drei Invarianten J_1, J_2, J_3 der Zerrungen sein:

$$J_1=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$$

$$J_2=4\,\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\cdots-\varepsilon_{xy}{}^2-\cdots$$

$$J_3=\begin{vmatrix} 2\,\varepsilon_{xx}, & \varepsilon_{xy}, & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx}, & 2\,\varepsilon_{yy}, & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx}, & \varepsilon_{zy}, & 2\,\varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

Wir wollen hier solche Einschränkungen nicht vornehmen.

Wir führen hingegen die Einschränkung ein, daß alle Ableitungen klein gegenüber 1 sind. Dann kann erstens ε_V im Ausdrucke $(1+\varepsilon_V)$ vernachlässigt werden. Weiter gehen die Zerrungen über:

$$\varepsilon_{xx} \quad \text{in} \quad \varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und zyklisch,}$$

$$\varepsilon_{xy} \quad \text{in} \quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und zyklisch.}$$

Dies sind die üblichen Dehnungen und Schiebungen der Elastizitätslehre für kleine Zerrungen und Drehungen.

Es kommt natürlich darauf an, daß die vernachlässigten Glieder für das Integral $A=\int\int\int a\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ ohne Bedeutung sind. Das ist wichtig, weil es vorkommen kann, daß $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0$ ist, folglich in ε_{xx} die Glieder $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ nur für das Integral bedeutungslos werden.

Die Zerrungsenergie $a\,(\varepsilon_{xx},\,..\,\varepsilon_{xy},\,..)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ geht über in $a\,(\varepsilon_x,\,..\,\gamma_{xy},\,..)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Wir wollen nunmehr δa bestimmen, das infolge der Variationen δu, δv, δw entsteht. Hierfür setzen wir für $\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$ die variierte Ableitung $\frac{\partial\,(u+\delta u)}{\partial x}$ usw. ein.

Dann wird

$$a\,(\varepsilon,\gamma)=a\left(\frac{\partial u}{\partial x},\,..\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\,..\right)$$

und

$$a\,(\varepsilon,\gamma)+\delta a=a\left(\frac{\partial\,(u+\delta u)}{\partial x},\,..\left(\frac{\partial\,(u+\delta u)}{\partial y}+\frac{\partial\,(v+\delta v)}{\partial x}\right),\,..\right).$$

Hieraus:

$$\delta a=\frac{\partial a}{\partial \varepsilon_x}\frac{\partial\,\delta u}{\partial x}+\cdots\frac{\partial a}{\partial \gamma_{xy}}\left(\frac{\partial\,\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial x}\right)+\cdots$$

Durch Vergleich mit Gl. (1) erhält man

$$\frac{\partial\,a\,(\varepsilon,\gamma)}{\partial\,\varepsilon_x}=\sigma_x, \qquad \frac{\partial\,a\,(\varepsilon,\gamma)}{\partial\,\gamma_{xy}}=\tau_{xy} \quad \text{und zyklisch} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

[1]) Love: Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe. Leipzig und Berlin 1907, S. 59, S. 71.

Der Satz vom Extremum der potentiellen Energie nach Gl. (2) gibt:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_V\int\int \delta a\,(\varepsilon,\gamma)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \int\limits_V\int\int (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ - \int\limits_o (\Xi\,\delta u + H\,\delta v + Z\,\delta w)\,\mathrm{d}o = 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Die Massenkräfte X, Y, Z und die Oberflächenkräfte Ξ, H, Z mögen unabhängig von den Verschiebungen, Zerrungen und Drehungen sein. Dieses läßt sich physikalisch begründen: Da die Raumdehnung so klein ist, daß sie gegen der eins vernachlässigt werden kann, werden sich die Massenkräfte nicht ändern; die Oberflächenkräfte, die von der Größe und Lage der Oberfläche abhängen, werden ebenfalls praktisch konstant bleiben.

Für die Variation der Verschiebungen u, v, w machen wir nunmehr folgende Vorschrift: An jeder Stelle der Oberfläche ist entweder die Verschiebung oder die Oberflächenkraft gegeben. Die Oberflächenteilchen $\mathrm{d}o$ teilen wir ein in die Teilchen $\mathrm{d}o_\mathfrak{v}$, für die die drei Verschiebungskomponenten u, v, w und in die Teilchen $\mathrm{d}o_\mathfrak{P}$, für die die drei Komponenten der Oberflächenkraft Ξ, H und Z gegeben sind. Allgemein könnte man in jedem Oberflächenteilchen $\mathrm{d}o$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem anbringen und für einen Teil der Richtungen die Verschiebungskomponenten, für den restlichen Teil die Kraftkomponenten angeben. Der Einfachheit der Darstellung wegen wollen wir uns auf den obigen Fall beschränken, bei dem die Einteilung in die Teilchen $\mathrm{d}o_\mathfrak{v}$ und $\mathrm{d}o_\mathfrak{P}$ genügt.

Bei der Variation der Verschiebungen lassen wir nur solche zusätzliche Verschiebungen δu, δv, δw zu, die an den Oberflächenstellen $\mathrm{d}o_\mathfrak{v}$ gleich null sind, da dort die Verschiebungen gegeben sind.

Die potentielle Energie Π, die zum Extremum wird, läßt sich dann wie folgt schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\Pi = \int\limits_V a\,(\varepsilon,\gamma)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \int\limits_V (Xu + Yv + Zw)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ - \int\limits_{o_\mathfrak{P}} (\Xi u + Hv + Zw)\,\mathrm{d}o_\mathfrak{P} = \text{Extremum}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Die zweite Variation von Π besteht nur aus der zweiten Variation der Zerrungsenergie $A = \int\limits_V a\,(\varepsilon,\gamma)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$; diese Variation hängt von der spez. Zerrungsenergie $a\,(\varepsilon,\gamma)$, genauer von deren zweiten Variation ab.

Die zweite Variation von $a\,(\varepsilon,\gamma)$ wird, wenn wir $\dfrac{\partial\,\delta u}{\partial x} = \delta\varepsilon_x$, $\dfrac{\partial\,\delta u}{\partial y} + \dfrac{\partial\,\delta v}{\partial x} = \delta\gamma_{xy}$ und zyklisch schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\delta^2 a &= \frac{\partial^2 a}{\partial\varepsilon_x{}^2}\,\delta\varepsilon_x{}^2 + 2\,\frac{\partial^2 a}{\partial\varepsilon_x\,\partial\varepsilon_y}\,\delta\varepsilon_x\,\delta\varepsilon_y + \cdots\\ &= \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial\varepsilon_x}\,\delta\varepsilon_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial\varepsilon_y}\,\delta\varepsilon_y + \cdots \frac{\partial\sigma_x}{\partial\gamma_{xy}}\,\delta\gamma_{xy} + \cdots\right)\delta\varepsilon_x + \cdots\\ &= \delta\sigma_x\,\delta\varepsilon_x + \cdots \delta\tau_{xy}\,\delta\gamma_{xy} + \cdots\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Wir machen nunmehr für a, einer Funktion von $\varepsilon_x, \ldots \gamma_{xy}, \ldots$, die Annahme, daß diese zweite Variation $\delta^2 a$ für alle möglichen ε und γ stets größer als null ist (stabiler Werkstoff).

Um die Bedeutung dieser Annahme durch ein Beispiel zu zeigen, nehmen wir an, daß bei einem gezogenen Stabe von der Länge 1 und vom Querschnitte 1 in a nur die Zerrung ε_x vorkommt; ebenfalls folgt hieraus nur die Spannung $\sigma_x = \dfrac{\partial a}{\partial\varepsilon_x}$. Der Zusammenhang zwischen σ_x und ε_x sei durch Bild 1 gegeben. Die Zerrungsenergie a ist die Fläche unterhalb der Spannungszerrungslinie. Geht man von der Stelle ε_x zur Stelle $\varepsilon_x + \delta\varepsilon_x$, so ändert sich σ_x um $\delta\sigma_x$. Das kleine Rechteck $\delta\varepsilon_x \cdot \delta\sigma_x$ ist die zweite Variation. Ist diese positiv, siehe Punkt 1 des Bildes 1, so wird einer Vergrößerung der Dehnung eine Vergrößerung der Kraft entsprechen. Ist sie hingegen negativ, Punkt 2 des Bildes, so entspricht einer Vergrößerung der Dehnung eine Abnahme der Kraft. Ist die äußere Kraft hingegen konstant, so kann kein stabiler Zustand eintreten.

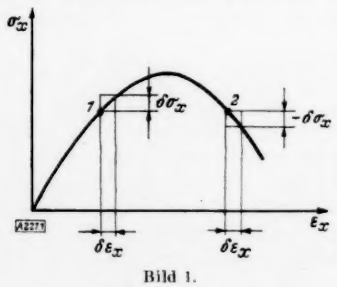


Bild 1.

Ist $\delta^2 a$ größer als null, so gilt dieses auch für $\delta^2 A$ und für $\delta^2 \Pi$; die potentielle Energie wird zum Minimum:

$$A = \int_V (Xu + Yv + Zw)\,dV - \int_{o_{\mathfrak{P}}} (\Xi u + Hv + Zw)\,do_{\mathfrak{P}} = \text{Min} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Das heißt, vergleichen wir Verschiebungszustände, die mit den gegebenen Randverschiebungen im Einklange sind, so wird der Ausdruck, der auf der linken Seite der Gl. (7) steht (die potentielle Energie), für die „wahren" Verschiebungen zum Minimum.

Das ist der Satz vom Minimum der potentiellen Energie.

III. Eindeutigkeitsbeweise.

Wir machen für die Verschiebungen den Ansatz

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \cdots,$$
$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \cdots,$$
$$w = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 + \cdots.$$

Hierbei soll jeder Teilansatz u_i, v_i, w_i den gegebenen Randbedingungen genügen. Nimmt man $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = 1$, so erfüllt auch der Ansatz u, v, w die Randbedingungen.

Nun berechnen wir $A, \int_V (Xu + Yv + Zw)\,dV, \int_{o_{\mathfrak{P}}} (\Xi u + Hv + Zw)\,do_{\mathfrak{P}}$ und hieraus die potentielle Energie. Aus der Bedingung, daß diese Energie ein Minimum sein muß, kann man nach dem Ritzschen Verfahren $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ bestimmen und findet für u, v, w die optimalen Ausdrücke.

Hierbei erhält man für $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ nur einen Satz von Werten. Nehmen wir an, es gäbe wenigstens zwei. Die hieraus sich ergebenden Verschiebungen wollen wir $u_1^{(\mathrm{opt})}$, $v_1^{(\mathrm{opt})}$, $w_1^{(\mathrm{opt})}$ und $u_2^{(\mathrm{opt})}$, $v_2^{(\mathrm{opt})}$, $w_2^{(\mathrm{opt})}$ nennen. Wir bilden

$$u = \alpha u_1^{(\mathrm{opt})} + (1-\alpha)\, u_2^{(\mathrm{opt})},$$
$$v = \alpha v_1^{(\mathrm{opt})} + (1-\alpha)\, v_2^{(\mathrm{opt})},$$
$$w = \alpha w_2^{(\mathrm{opt})} + (1-\alpha)\, w_2^{(\mathrm{opt})}.$$

Für $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ wird die hieraus gebildete potentielle Energie zum Minimum. Ändert man α kontinuierlich von 0 bis 1, so muß hierbei die potentielle Energie Π einmal zum Maximum werden. Dieses ist aber nicht möglich, da $\delta^2 \Pi$ überall größer als null ist.

Auch die allgemeine Lösung für $\Pi = \text{Min}$, $\delta \Pi = 0$ gibt nur eine Lösung. Gäbe es zwei Lösungen, so könnten wir aus beiden eine Linearkombination bilden, wie oben aus $u_1^{(\mathrm{opt})}$ und $u_2^{(\mathrm{opt})}$; für jede Einzellösung wird Π zum Minimum. Der weitere Beweis, daß dies nicht möglich ist, wird wie oben geführt.

IV. Satz vom Minimum der Ergänzungsenergie.

Nun wollen wir die Spannungsenergie definieren. Die Annahmen der vorherigen Abschnitte II und III bleiben bestehen.

Die Zerrungsenergie war eine Funktion der Zerrungen: $a = a(\varepsilon_x, \ldots \gamma_{xy}, \ldots)$; die Ableitungen gaben die Spannungen als Funktion der Zerrungen:

$$\sigma_x = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_x}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial a}{\partial \gamma_{xy}} \text{ und zyklisch.}$$

Aus diesen sechs Gleichungen sind umgekehrt die sechs Zerrungen als Funktionen der Spannungen bestimmt: $\varepsilon_x = \varepsilon_x(\sigma, \tau)$, $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(\sigma, \tau)$ und zyklisch.

Wir bilden nunmehr folgende Funktion der Spannungen

$$b(\sigma_x, \ldots \tau_{xy}, \ldots) = \sigma_x \varepsilon_x + \cdots + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \cdots - a(\varepsilon_x, \ldots \gamma_{xy}, \ldots).$$

Alle Zerrungen werden hierin durch die Spannungen ausgedrückt. Bilden wir die Ableitung nach einer Spannung, so erhalten wir

$$\frac{\partial b}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial}{\partial \sigma_x}(\sigma_x \varepsilon_x + \cdots \tau_{xy} \gamma_{xy} + \cdots - a)$$
$$= 1 \cdot \varepsilon_x + \sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \sigma_x} + \cdots + \tau_{xy} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \sigma_x} + \cdots - \left(\frac{\partial a}{\partial \varepsilon_x} \cdot \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \sigma_x} + \cdots + \frac{\partial a}{\partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \sigma_x} + \cdots \right)$$
$$= \varepsilon_x(\sigma, \tau) \text{ und zyklisch,}$$
$$\frac{\partial b}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}(\sigma, \tau) \text{ und zyklisch.}$$

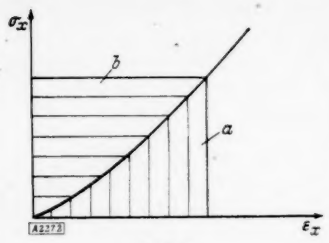


Bild 2.

Haben wir, als Beispiel, nur eine Zerrung ε_x und eine Spannung σ_x, so sind a und b im $\sigma_x - \varepsilon_x$ Diagramme nach Bild 2 Flächen, die sich zum Rechtecke $\varepsilon_x \sigma_x$ ergänzen.

Im belasteten Körper stellt sich ein bestimmter Spannungszustand ein mit den Spannungen $\sigma_x, \ldots \tau_{xy}, \ldots$, die Funktionen von x, y, z sind. Wir betrachten einen benachbarten Spannungszustand, der mit den Massenkräften X, Y, Z und den variierten Oberflächenkräften $\Xi + \delta\Xi$, $H + \delta H$, $Z + \delta Z$ im Gleichgewichte ist. Es ist aber nicht notwendig, daß dieser Spannungszustand für diese Kräfte die „wahre" Lösung darstellt, d. h. daß er das gegebene Spannungs-Zerrungsgesetz befriedigt.

Für die Variation der Spannungen gelten dann die Gleichgewichtsbedingungen im Innern:

$$\frac{\partial\,\delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta\tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{und zyklisch,}$$

und die Gleichgewichtsbedingungen für das Oberflächenteilchen $\mathrm{d}o$:

$$\delta\Xi\,\mathrm{d}o = \delta\sigma_x\,\mathrm{d}o\cos\alpha + \delta\tau_{xy}\,\mathrm{d}o\cos\beta + \delta\tau_{xz}\,\mathrm{d}o\cos\gamma \quad \text{und zyklisch.}$$

Wir bilden nun die Variation der Spannungsenergie für den ganzen Körper

$$\begin{aligned}\delta B &= \int_V\int\int\left(\frac{\partial b}{\partial\sigma_x}\delta\sigma_x + \cdots + \frac{\partial b}{\partial\tau_{xy}}\delta\tau_{xy} + \cdots\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_V\int\int(\varepsilon_x\,\delta\sigma_x + \cdots\gamma_{xy}\,\delta\tau_{xy} + \cdots)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_V\int\int\left[\frac{\partial u}{\partial x}\delta\sigma_x + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta\tau_{xy} + \cdots\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

Durch partielle Integration erhält man bei Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingungen:

$$\delta B = \int_o(\delta\Xi u + \delta H v + \delta Z w)\,\mathrm{d}o\,.$$

Nun nehmen wir wie vorher an, daß für einen Teil der Oberflächenpunkte die Kräfte, für den anderen Teil die Verschiebungen gegeben sind. Für die inneren Punkte sind stets die Kräfte gegeben, so daß wir X, Y, Z nicht variiert haben. Die Variation der Spannungen nehmen wir so vor, daß dort, wo die Kräfte gegeben sind, die Variation von $\delta\Xi$ gleich null wird, d. h. daß die abgeänderten Spannungen mit den vorgegebenen Kräften im Gleichgewichte sind.

Wir erhalten

$$\delta B - \int_{o_v}(\delta\Xi u + \delta H v + \delta Z w)\,\mathrm{d}o_v = 0\,.$$

Die zweite Variation $\delta^2 B$ der Spannungsenergie wird gleich der zweiten Variation der Zerrungsenergie, da $\delta^2 b$ gleich $\delta^2 a$, vgl. Gl. (6), wird.

$$\delta^2 b = \delta\sigma_x\,\delta\varepsilon_x + \cdots\delta\tau_{xy}\,\delta\gamma_{xy} + \cdots = \delta^2 a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Falls diese, wie angenommen ist, stets größer als null ist, wird

$$B - \int_{o_v}(\Xi u + H v + Z w)\,\mathrm{d}o_v = \mathrm{Min} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Das heißt, vergleichen wir Spannungszustände, die mit den gegebenen Massenkräften und Oberflächenkräften im Gleichgewicht sind, so wird der Ausdruck auf der linken Seite der Gl. (9) (die Ergänzungsenergie) für die „wahren" Spannungen zum Minimum.

Dies ist der Satz vom Minimum der Ergänzungsarbeit (Satz von Castigliano).

Beide Minimalsätze lassen sich nur für kleine Drehungen und Zerrungen ableiten, da nur dann die zweite Variation der potentiellen Energie bei stabilem Werkstoffe größer als null ist.

V. Eingrenzung der elastischen Konstanten für besondere Elastizitätsgesetze.

Mit Hilfe beider Sätze lassen sich Beziehungen aufstellen zwischen einer vorgegebenen Kraftgröße und der durch sie hervorgerufenen Verschiebung in Richtung der Kraftgröße, und zwar kann man die elastische Konstante, die in der betreffenden Beziehung auftritt, durch

Näherungsansätze nach oben und unten eingrenzen. Hierbei kann das Gesetz für die Formänderungsarbeit etwas weiter als das Hookesche Proportionalitätsgesetz gefaßt werden.

Wir nehmen an, daß $a(\varepsilon_x, .. \gamma_{xy}, ..)$ eine Funktion der Zerrungen ist, der Art, daß bei Multiplikation aller Zerrungen mit $n > 0$, die Zerrungsenergie sich um das $n^{1+\alpha}$-fache vergrößert. Dann wird $b(\sigma_x, .. \tau_{xy}, ..)$ eine Funktion der Spannungen der Art, daß bei Multiplikation aller Spannungen mit $m > 0$, b sich um das $m^{1+1/\alpha}$-fache vergrößert (a und b — homogene Funktionen der Zerrungen bzw. Spannungen).

Beispiel: $a = C_{11}|\varepsilon_x|^{1+\alpha} + C_{22}|\varepsilon_y|^{1+\alpha} + .. C_{12}|\gamma_{xy}|^{1+\alpha} + ..$, wobei a sowohl als auch C_{11}, C_{22}, .. C_{12}, .. positive Konstanten sind, wobei die C für positive und negative Zerrungen verschieden sein können.

Hieraus
$$|\sigma_x| = (1+\alpha)\, C_{11}|\varepsilon_x|^{\alpha}; \quad \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} > 0,$$
$$|\varepsilon_x| = [|\sigma_x| : (1+\alpha)\, C_{11}]^{1/\alpha},$$
$$b = C_{11}'|\sigma_x|^{1+1/\alpha} + .. C_{12}'|\tau_{xy}|^{1+1/\alpha} + ..$$

mit
$$C_{11}' = \frac{a}{(1+a)^{1+1/\alpha}\, C_{11}^{1/\alpha}} \quad \text{usw.}$$

Die zweite Variation von a und b ist bei diesem Beispiele positiv.

Für einen belasteten Körper, z. B. für einen Balken mit der Einzellast P nach Bild 3 werde der Zusammenhang zwischen dieser Kraft P und der Verschiebung C des Angriffsquerschnittes in Richtung der Kraft gesucht. Die „wahren" Werte wollen wir mit P^* und C^* bezeichnen, da wir es auch mit Näherungsansätzen zu tun haben werden, die Näherungswerte für diese Größen enthalten.

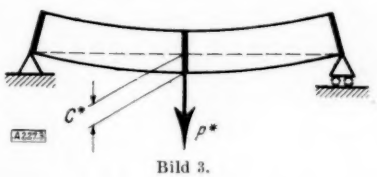


Bild 3.

In den Stützquerschnitten und im Angriffsquerschnitte der Kraft P seien Wände eingebaut, die so weit starr sind, daß sie sich nur in Längsrichtung des Balkens verwölben können, ohne daß ein Widerstand auftritt. Auf diese Weise erhalten wir eine einheitliche Verschiebung des Angriffsquerschnittes in Richtung der Kraft P.

Wir machen nun bei gegebener Kraft P^* einen beliebigen Ansatz für alle Verschiebungen. Für die Stützquerschnitte schreiben wir $u = v = 0$ vor, für den Angriffsquerschnitt $u = 0$, $v = C$. Alle Verschiebungen drücken wir durch ihr Verhältnis zu C aus, so daß wir außer C nur noch die Größen $\left(\frac{u}{C}\right)$, $\left(\frac{v}{C}\right)$, $\left(\frac{w}{C}\right)$ haben, die Funktionen von x, y, z sind. Aus diesem Verschiebungsansatze finden wir die Zerrungen und daraus die Zerrungsenergie

$$A = C^{1+\alpha} \int_{\mathfrak{V}} a\left(\frac{\partial \frac{u}{C}}{\partial x}, ...\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = C^{1+\alpha} A'.$$

A' ist durch Integration aus dem Ansatze zu finden.

Hieraus erhält man die potentielle Energie

$$A - \int_{o\mathfrak{V}} (\Xi u + H v + Z w)\, \mathrm{d}\, o_{\mathfrak{V}} = C^{1+\alpha} A' - P^* C.$$

Wir wollen annehmen, daß der Ansatz für $\left(\frac{u}{C}\right)$, $\left(\frac{v}{C}\right)$, $\left(\frac{w}{C}\right)$ nicht den wirklichen Verschiebungen entspricht. Dann ist die potentielle Energie des Näherungsansatzes stets größer als die wirkliche potentielle Energie. Die Größe C ist noch frei wählbar. Wir wählen sie so, daß die potentielle Energie möglichst klein wird, um der wirklichen potentiellen Energie möglichst nahe zu kommen. Wir machen $C^{1+\alpha} A' - P^* C$ zum Minimum und erhalten für den optimalen Wert von C:

$$C_{\mathrm{opt}}{}^{\alpha} = \frac{P^*}{(1+\alpha)\, A'}.$$

Für diesen Wert wird die potentielle Energie:

$$(C^{1+\alpha} A' - P^* C)_{\min} = -\frac{a}{1+\alpha} C_{\mathrm{opt}} P^* = -\frac{a P^{*\,1+1/\alpha}}{(1+\alpha)^{1+1/\alpha} A'^{\,1/\alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Beim Einsetzen von C_{opt} ist im mittleren Ausdrucke A', im letzten Ausdrucke C beseitigt.

Wählt man für den Verschiebungsansatz die richtigen Funktionen, so erhält man die wirkliche potentielle Energie; diese wird gleich $-\frac{a}{1+a} C^* P^*$, entsprechend dem mittleren Ausdrucke der Gl. (10), wobei C_{opt} in C^* übergeht. Die mit beliebigem Verschiebungsgesetz gefundene potentielle Energie ist stets größer als diese wirkliche. Wir vergleichen beide und nehmen hierbei den letzten Ausdruck der Gl. (10):

$$-\frac{a P^{*\,1+1/a}}{(1+a)^{1+1/a} A'^{\,1/a}} \geqq -\frac{a}{1+a} C^* P^*.$$

Hieraus

$$\frac{P^*}{(1+a) A'} \leqq C^{*\,a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Das Gleichniszeichen gilt nur dann, wenn man an Stelle des Näherungsansatzes den wirklichen gewählt hat.

Bei Verwendung des Satzes vom Minimum der Ergänzungsarbeit nehmen wir C^* als gegeben an. Dann wählen wir für die Kraft P einen Spannungsansatz, der mit P und den Lagerkräften im Gleichgewichte ist. Hieraus berechnen wir

$$B = \iiint\limits_V b \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = P^{1+1/a} \iiint\limits_V b\left(\frac{\sigma_x}{P}, \ldots \frac{\tau_{xy}}{P}, \ldots\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = P^{1+1/a} B'.$$

B' ist ein aus dem gewählten Spannungsansatze durch Integration berechneter Wert. Die Ergänzungsenergie wird:

$$B - \int\limits_{o_\mathfrak{v}} (\Xi u + H v + Z w)\,\mathrm{d}\,o_\mathfrak{v} = P^{1+1/a} B' - P C^*.$$

Wir wählen nun P so, daß die Ergänzungsenergie zum Minimum wird. Dieser Wert von P sei P_{opt}. Man erhält:

$$P_{\text{opt}}^{\,1/a} = \frac{a C^*}{(1+a) B'}.$$

Für diesen Wert wird die Ergänzungsenergie

$$(P^{1+1/a} B' - P C^*)_{\min} = -\frac{1}{1+a} P_{\text{opt}} C^* = -\frac{a^a C^{*\,1+a}}{(1+a)^{1+a} B'^{\,a}} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Im mittleren Ausdrucke ist B', im letzten Ausdrucke P_{opt} beseitigt.

Wählt man für den Spannungsansatz die richtigen Funktionen, so erhält man die wirkliche Ergänzungsenergie; diese wird gleich $-\frac{1}{1+a} P^* C^*$, entsprechend dem mittleren Ausdrucke der Gl. (12), wobei P_{opt} in P^* übergeht. Die mit beliebigem Spannungsansatze gefundene Ergänzungsenergie ist stets größer als die wirkliche. Wir vergleichen beide und nehmen hierbei den letzten Ausdruck der Gl. (12):

$$-\frac{a^a C^{*\,1+a}}{(1+a)^{1+a} B'^{\,a}} \geqq -\frac{1}{1+a} P^* C^*.$$

Hieraus

$$C^{*\,a} \leqq P^* \left(1+\frac{1}{a}\right)^a B'^{\,a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Durch die Ungleichungen (11) und (13) ist das Verhältnis $\frac{C^{*\,a}}{P^*}$ eingegrenzt:

$$\frac{1}{(1+a) A'} \leqq \frac{C^{*\,a}}{P^*} \leqq \left(1+\frac{1}{a}\right)^a B'^{\,a}.$$

Für $a = 1$, also für das Hookesche Gesetz entsprechen die Ergebnisse meinen früheren Untersuchungen [2]).

VI. Annahme eines allgemeinen Elastizitätsgesetzes.

Um die Verhältnisse für ein beliebiges Elastizitätsgesetz für a (jedoch mit $\delta^2 a > 0$) zu klären, untersuchen wir das bisherige Gesetz, wobei a eine homogene Funktion der Zerrungen war, etwas eingehender.

[2]) Z. angew. Math. Mech. Bd. 11 (1931), S. 244 bis 245 und Bd. 18 (1938), S. 375 bis 379.

Die Ungleichung für einen beliebigen Ansatz für die Verschiebungen lautet mit beliebigem C:

$$C^{1+\alpha} A' - P^* C \geqq -\frac{\alpha}{1+\alpha} C^* P^*.$$

Setzt man $C = C_{\text{opt}} = \left[\frac{P^*}{(1+\alpha) A'}\right]^{1/\alpha}$ ein, so erhält man

$$\frac{P^*}{(1+\alpha) A'} \leqq C^{*\alpha}.$$

Wir können aber auch $C = C^*$ einsetzen und erhalten

$$C^{*1+\alpha} A' - P^* C^* \geqq -\frac{\alpha}{1+\alpha} C^* P^*.$$

Zu beiden Seiten fügen wir $P^* C^*$ hinzu und erhalten wie vorher:

$$\frac{P^*}{(1+\alpha) A'} \leqq C^{*\alpha}.$$

Bei einem beliebigen Elastizitätsgesetze mit $\delta^2 a > 0$ erhält man verschiedene Ergebnisse für $C = C_{\text{opt}}$ und $C = C^*$.

Wir lassen die Kraft allmählich von 0 bis P^* wachsen und bezeichnen einen dazwischenliegenden Wert mit p^*. Hierbei ändert sich die Verschiebung in Richtung der Kraft von 0 bis C^*; ein dazwischenliegender Wert sei c^*. Dabei ist p^* eine Funktion von c^* oder c^* eine Funktion von p^*. Für die wahren Verschiebungen wird das Integral $A = \int\int\int_V a \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ gleich der hinzugeführten Formänderungsarbeit $\int_0^{C^*} p^* \, \mathrm{d}c^*$.

Wenn wir die Kraft P^* wirken lassen und einen beliebigen Verschiebungsansatz mit der Verschiebung C machen, so erhalten wir die Ungleichung:

$$A(C) - P^* C \geqq \int_0^{C^*} p^* \, \mathrm{d}c^* - P^* C^* = -\int_0^{P^*} c^* \, \mathrm{d}p^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Hierin ist A eine Funktion von C. Das C wird zum Optimum, wenn die linke Seite zum Minimum wird, also für

$$\frac{\mathrm{d}\, A(C_{\text{opt}})}{\mathrm{d}\, C_{\text{opt}}} = P^* \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Hieraus ist C_{opt} als Funktion von P^* bestimmt. Man erhält:

$$-A(C_{\text{opt}}) + C_{\text{opt}} \frac{\mathrm{d}\, A(C_{\text{opt}})}{\mathrm{d}\, C_{\text{opt}}} \leqq \int_0^{P^*} c^* \cdot \mathrm{d}p^* \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Setzt man hingegen in Ungleichung (14) $C = C^*$ ein, so erhält man:

$$A(C^*) \geqq \int_0^{C^*} p^* \, \mathrm{d}c^* \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Ungleichungen (16) und (17) besagen etwas Verschiedenes. In Ungleichung (16) kann man die linke Seite als das Integral $\int_0^{P^*} c_{\text{opt}} \, \mathrm{d}p^*$ auffassen, wobei c_{opt} eine Funktion von p^* ist, entsprechend der Gleichung $\int\int\int \frac{\mathrm{d}\, a(c_{\text{opt}})}{\mathrm{d}\, c_{\text{opt}}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}\, A(c_{\text{opt}})}{\mathrm{d}\, c_{\text{opt}}} = p^*$. Denn es ist dann

$$\int_0^{P^*} c_{\text{opt}} \, \mathrm{d}p^* = \int_0^{P^*} c_{\text{opt}} \frac{\mathrm{d}\, p^*}{\mathrm{d}\, c_{\text{opt}}} \, \mathrm{d}\, c_{\text{opt}} = \int c_{\text{opt}} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 A(c_{\text{opt}})}{\mathrm{d}\, c_{\text{opt}}^2} \, \mathrm{d}\, c_{\text{opt}}$$

$$= C_{\text{opt}} \frac{\mathrm{d}\, A(C_{\text{opt}})}{\mathrm{d}\, C_{\text{opt}}} - \int_0^{C_{\text{opt}}} \frac{\mathrm{d}\, A(c_{\text{opt}})}{\mathrm{d}\, c_{\text{opt}}} \, \mathrm{d}\, c_{\text{opt}} = C_{\text{opt}} \frac{\mathrm{d}\, A}{\mathrm{d}\, C_{\text{opt}}} - A(C_{\text{opt}}).$$

Dieser Ausdruck entspricht der linken Seite der Ungleichung (16).

Wir können über p^* sowohl c_{opt} als auch c^* auftragen, Bild 4. Die Größe p ist in diesem Bilde nach oben, die Größe c nach rechts gerichtet. Die Fläche $\int_0^{P^*} c^* \,\mathrm{d}\, p^*$ wird nach Ungleichung (16) stets größer als die Fläche $\int_0^{P^*} c_{opt} \,\mathrm{d}\, p^*$ für gleiche obere Grenze P^*.

In Ungleichung (17) kann man die linke Seite wie folgt schreiben:

$$\int_V\int\int a\,(C^*)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = A\,(C^*) = \int_0^{C^*} \frac{\partial\, A\,(c^*)}{\partial\, c^*}\,\mathrm{d}\,c^*.$$

Trägt man p^* und $p = \dfrac{\partial\, A\,(c^*)}{\partial\, c^*}$ über c^* auf, Bild 5, so ist nach Ungleichung (17) die Fläche $\int_0^{C^*} p\,\mathrm{d}\,c^*$ stets größer als $\int_0^{C^*} p^*\,\mathrm{d}\,c^*$.

In den Bildern 4 und 5 sehen die Linienzüge gleich aus. Es sind aber verschiedene Größen und Flächen, die bei den Ungleichungen (16) und (17) verglichen werden.

Entsprechend liegen die Verhältnisse beim Minimalsatz der Ergänzungsenergie. Wir schreiben die Verschiebung C^* vor und lassen die Kraft P unbestimmt. Dann erhalten wir

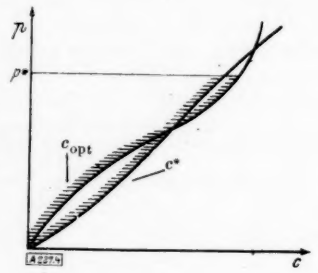


Bild 4.

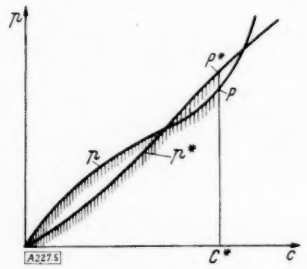


Bild 5.

$$\int_V\int\int b\,(P)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z - P\,C^* = B\,(P) - P\,C^* \geqq \int_0^{P^*} c^*\,\mathrm{d}\,p^* - C^*\,P^* = -\int_0^{C^*} p^*\,\mathrm{d}\,c^*.$$

Für $P = P_{opt}$ gilt $\dfrac{\mathrm{d}\,B(P_{opt})}{\mathrm{d}\,P_{opt}} = C^*$. Hieraus

$$-B\,(P_{opt}) + P_{opt}\,\frac{\mathrm{d}\,B(P_{opt})}{\mathrm{d}\,P_{opt}} \leqq \int_0^{C^*} p^*\,\mathrm{d}\,c^* \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Für $P = P^*$ erhält man

$$B\,(P^*) \geqq \int_0^{P^*} c^*\,\mathrm{d}\,p^* \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Die linke Seite der Ungleichung (18) schreiben wir $\int_0^{C^*} p_{opt}\,\mathrm{d}\,c^*$, wobei $\dfrac{\mathrm{d}\,B\,(p_{opt})}{\mathrm{d}\,p_{opt}} = c^*$ ist. Trägt man p^* und p_{opt} über c^* auf, so ist nach Ungleichung (18) das Integral $\int_0^{C^*} p_{opt}\,\mathrm{d}\,c^*$ stets größer als $\int_0^{C^*} p^*\,\mathrm{d}\,c^*$. Im Gegensatz hierzu war nach Ungleichung (17) $\int_0^{C^*} p\,\mathrm{d}\,c^*$ stets kleiner als $\int_0^{C^*} p^*\,\mathrm{d}\,c^*$.

Trägt man nach Ungleichung (19) $c = \dfrac{\mathrm{d}\,B\,(p^*)}{\mathrm{d}\,p^*}$ und c^* über p^* ab, so ist das Integral $\int_0^{P^*} c\,\mathrm{d}\,p^*$ stets kleiner als $\int_0^{P^*} c^*\,\mathrm{d}\,p^*$. Im Gegensatz hierzu war nach Ungleichung (16) $\int_0^{P^*} c_{opt}\,\mathrm{d}\,p^*$ stets größer als $\int_0^{P^*} c^*\,\mathrm{d}\,p^*$.

Hiermit ist zur Bestimmung der elastischen Konstanten noch nichts gewonnen, denn aus der Ungleichung der Integrale folgt nicht eine entprechende Ungleichung der Integranden. So folgt nicht aus Ungleichung (19), daß bei diesem Ansatze $C < C^*$ ist.

Man könnte nunmehr annehmen, daß bei einer geschickteren Verwendung der grundlegenden Annahmen es vielleicht doch möglich sein könnte, eine unmittelbare Beziehung zwischen C, C^* und C_{opt} bzw. P, P^* und P_{opt} zu finden.

Daß dieses nicht der Fall ist, soll an einem Beispiele gezeigt werden. Die Kraft P^* ziehe an zwei Stäben, Bild 6, wobei infolge der Kreuzkopfführung die Verlängerungen beider Stäbe gleich groß sind. Beide Stäbe haben die Länge 1 und den Querschnitt $^1/_2$. Für die linke Hälfte des oberen Stabes laute das elastische Gesetz für diese Belastung $a_1 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_1^{\,2}$, für die rechte Hälfte $a_2 = \frac{1}{5}\,\varepsilon_2^{\,5}$, für die linke Hälfte des unteren Stabes sei $a_3 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_3^{\,2}$, für die rechte Hälfte $a_4 = \frac{4}{5}\,\varepsilon_4^{\,5/4}$.

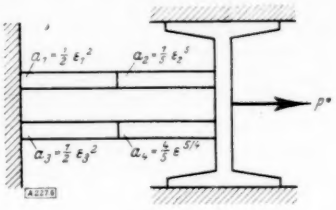


Bild 6.

Die Spannungen werden $\sigma_1 = \varepsilon_1$, $\sigma_2 = \varepsilon_2^{\,4}$, $\sigma_3 = \varepsilon_3$, $\sigma_4 = \varepsilon_4^{\,1/4}$; Spannungen und Zerrungen in Richtung der Kraft P.

Erst werde der wirkliche Zusammenhang zwischen P^* und C^* ermittelt. Wirkt im oberen Stabe die Kraft P_o, so wird die Spannung $2\,P_o$ und hieraus die Verlängerung

$$C^* = \frac{1}{2}\,[2\,P_o + (2\,P_o)^{1/4}];$$

wirkt im unteren Stabe die Kraft P_u, so wird die Spannung $2\,P_u$ und die Verlängerung

$$C^* = \frac{1}{2}\,[2\,P_u + (2\,P_u)^4].$$

Aus beiden Gl. für C^* folgt $P_o = P_u^{\,4}$ und $C^* = P_o + P_u = P^*$. Im Bilde 7 sind $2\,P_o$, $2\,P_u$ und ihr Mittelwert P^* als Funktionen von C^* dargestellt. Nunmehr machen wir den Näherungsansatz

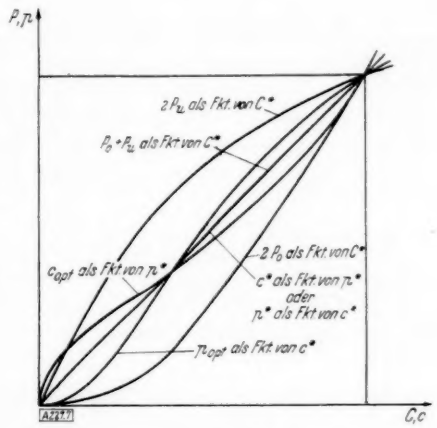


Bild 7.

$$u = c\,x; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = c; \quad A(c) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\,c^2 + \frac{1}{5}\,c^5 + \frac{1}{2}\,c^2 + \frac{4}{5}\,c^{5/4}\right).$$

Der Satz vom Minimum der potentiellen Energie gibt:

$$A(c_{\text{opt}}) - P^*\,c_{\text{opt}} \geqq -\int_0^{P^*} c^*\,\mathrm{d}\,p^*$$

mit

$$\frac{\mathrm{d}\,A(c_{\text{opt}})}{\mathrm{d}\,c_{\text{opt}}} = \frac{1}{4}\,[2\,c_{\text{opt}} + c_{\text{opt}}^{\,4} + c_{\text{opt}}^{\,1/4}] = p^*.$$

Für jedes p^* erhält man ein c_{opt}, das in Bild 7 über p^* aufgetragen ist. Man sieht, daß hier $\int_0^{P^*} c_{\text{opt}}\,\mathrm{d}\,p^* \leqq \int_0^{P^*} c^*\,\mathrm{d}\,p^*$, trotzdem aber c_{opt} nur im unteren Teile kleiner als c^* ist.

Machen wir den Spannungsansatz $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = p$, so wird

$$B(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\,p^2 + \frac{4}{5}\,p^{5/4} + \frac{1}{2}\,p^2 + \frac{1}{5}\,p^5\right).$$

Der Satz vom Minimum der Ergänzungsarbeit gibt:

$$B(p_{\text{opt}}) - p_{\text{opt}}\,C^* \geqq -\int_0^{C^*} p^*\,\mathrm{d}\,c^*$$

mit

$$\frac{\mathrm{d}\,B(p_{\text{opt}})}{\mathrm{d}\,p_{\text{opt}}} = \frac{1}{4}\,[2\,p_{\text{opt}} + p_{\text{opt}}^{\,1/4} + p_{\text{opt}}^{\,4}] = c^*.$$

Für jedes c^* erhält man ein p_{opt}, das über c^* aufgetragen ist. Auch hier wird p_{opt} nur im unteren Teile kleiner als p^*.

VII. Eingrenzung der elastischen Konstanten für den allgemeinen Fall.

Für diesen allgemeinen Fall des elastischen Gesetzes möchte ich nunmehr einen Weg angeben zur Eingrenzung der elastischen Konstanten, d. h. zur Aufstellung von Ungleichungen zwischen P^* und C^*. (Die Genauigkeit wird hierbei jedoch geringer als bei dem früheren Verfahren für die Fälle, wo dieses durchführbar ist.)

Wir addieren die Ungleichungen (16) und (18) und erhalten:

$$-A(C_{opt}) + C_{opt}\,P^* - B(P_{opt}) + P_{opt}\,C^* \leqq \int_0^{P^*} c^*\,\mathrm{d}\,p^* + \int_0^{C^*} p^*\,\mathrm{d}\,c^* = P^*\,C^*.$$

Hieraus

$$A(C_{opt}) - C_{opt}\,P^* + B(P_{opt}) - P_{opt}\,C^* + C^*\,P^* \geqq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

In der linken Seite sind C_{opt} und P_{opt} Funktionen von P^* bzw. C^* entsprechend den Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}\,A(C_{opt})}{\mathrm{d}\,C_{opt}} = P^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

$$\frac{\mathrm{d}\,B(P_{opt})}{\mathrm{d}\,P_{opt}} = C^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Wir denken uns C_{opt} und P_{opt} nach Gl. (21) und (22) in Ungleichung (20) eingesetzt, so daß wir eine Ungleichung für P^* und C^* erhalten. Diese Ungleichung ist nur in einem bestimmten Gebiete der C^*-P^*-Ebene erfüllt. Um die Grenzen des Gebietes festzustellen, lösen wir das Gleichnissystem: Ungleichung (20) mit dem Gleichniszeichen, Gl. (21) und Gl. (22).

Ebenso könnte man die Ungleichungen (17) und (19) addieren. Die hieraus entstehende Ungleichung ist jedoch immer erfüllt.

Für das Beispiel von VI werde die Eingrenzung der Beziehung zwischen P^* und C^* durchgeführt. Ungleichung (20) lautet mit den früheren Ansätzen:

$$\frac{1}{4}\left(C_{opt}^{\,2} + \frac{1}{5}\,C_{opt}^{\,5} + \frac{4}{5}\,C_{opt}^{\,5/4}\right) - C_{opt}\,P^* + \frac{1}{4}\left(P_{opt}^{\,2} + \frac{1}{5}\,P_{opt}^{\,5} + \frac{4}{5}\,P_{opt}^{\,5/4}\right) - P_{opt}\,C^* + C^*\,P^* \geqq 0\,.$$

Gl. (21) und (22) geben:

$$\frac{1}{4}\left[2\,C_{opt} + C_{opt}^{\,4} + C_{opt}^{\,1/4}\right] = P^*, \quad \frac{1}{4}\left[2\,P_{opt} + P_{opt}^{\,4} + P_{opt}^{\,5/4}\right] = C^*.$$

Setzen wir C^* und P^* in die Gleichung ein, die aus der Ungleichung zur Festlegung der Grenzen folgt, so erhalten wir

$$-\left[C_{opt}^{\,2} + \frac{4}{5}\,C_{opt}^{\,5} + \frac{1}{5}\,C_{opt}^{\,5/4}\right]$$

$$-\left[P_{opt}^{\,2} + \frac{4}{5}\,P_{opt}^{\,5} + \frac{1}{5}\,P_{opt}^{\,5/4}\right]$$

$$+\left[C_{opt} + \frac{1}{2}\,C_{opt}^{\,4} + \frac{1}{2}\,C_{opt}^{\,1/4}\right]$$

$$\left[P_{opt} + \frac{1}{2}\,P_{opt}^{\,4} + \frac{1}{2}\,P_{opt}^{\,1/4}\right] = 0.$$

Für jeden C_{opt}-Wert erhält man zwei P_{opt}-Werte und umgekehrt. Dasselbe folgt für die Grenzen der C^*- und P^*-Werte. Bild 8 zeigt das Ergebnis; innerhalb des schraffierten Gebietes muß die C^*-P^*-Linie verlaufen. 227

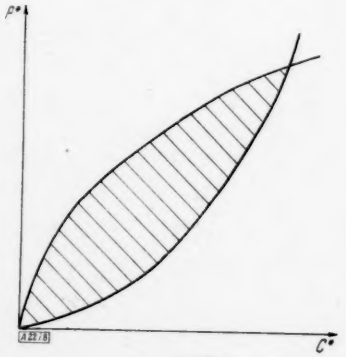


Bild 8.

Das Knicken schwerer Gestänge.

Von *Fr. A. Willers* in Dresden.

Während man gewöhnlich bei der Bestimmung der Knicklast eines Stabes sein Eigengewicht vernachlässigt, ist die Berücksichtigung dieses Gewichtes bei der Untersuchung des Knickens langer Gestänge, etwa von Bohrgestängen, wesentlich. Ausgehend von dem bekannten Minimalprinzip erhält man auch hier Gleichung und Randbedingungen. Die Integration führt auf Besselsche und Lommelsche Funktionen, aus deren asymptotischer Darstellung die Knickkraft für sehr lange Gestänge gewonnen wird.

1. Einleitung und Ergebnisse. Bei kurzen Stäben wird das Eigengewicht die Knickkraft kaum beeinflussen. Anders bei langen Gestängen, für die im folgenden ganz allgemein die Gleichung für die Knickkraft in Form einer Determinante gegeben wird. Diese Kraft trägt einen Teil des Gestänges von der Länge b, der also auf Druck beansprucht ist, während der weiter oben liegende Teil Zug erfährt. Rechnerisch ergibt sich aus dieser Determinante die Knickkraft, wenn man die Länge des Gestänges in Vielfachen oder Bruchteilen der Länge b in sie einsetzt. Es ist also nicht ohne weiteres möglich, für eine gegebene Länge l die Knickkraft zu berechnen, sondern man muß zunächst für vorgeschriebene Vielfache von b die Knickkraft P bestimmen. Aus dieser ergibt sich mit den Konstanten des Gestänges die zugehörige Länge l und man kann nun etwa wie in Bild 1 die dimensionslose Größe $\bar{P}=\frac{P}{\sqrt[3]{E\,I\,(\mu g)^2}}$ als Funktion der ebenfalls dimensionslosen Größe $\bar{l}=l\sqrt[3]{\frac{\mu g}{E\,I}}$ auftragen (E Elastizitätsmodul, I Trägheitsmoment des Gestängequerschnittes, μg Gewicht der Längeneinheit des Gestänges). In Bild 1 sind so Punkte für verschiedene Aufhängungen und verschiedene Lagerungen am

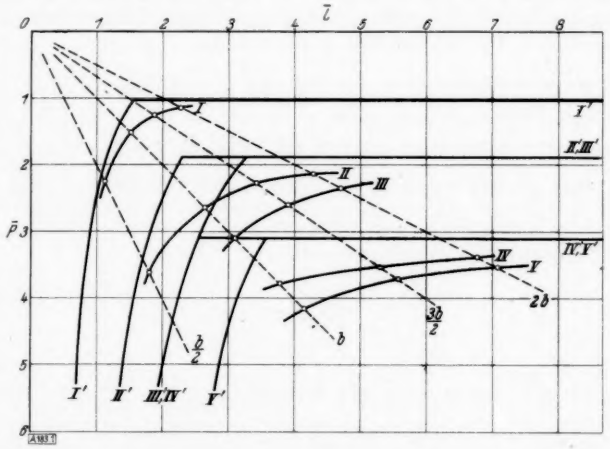


Bild 1. Die Knickkraft schwerer Gestänge als Funktion der Länge.
I: Oben eingespanntes, unten freies Gestänge,
II: oben und unten drehbar befestigtes Gestänge,
III: oben eingespanntes, unten drehbar befestigtes Gestänge,
IV: oben drehbar befestigtes, unten eingespanntes Gestänge,
V: oben und unten eingespanntes Gestänge.

unteren Ende eingetragen und durch Kurven verbunden. Auch sind dort die zur $\bar{l}$-Achse parallelen Asymptoten dieser Kurven eingezeichnet. Für Gestänge von einer Länge, die größer als $2b$ ist, ist die kritische Kraft höchstens um 12 bis 15% größer als für sehr lange Gestänge. Ferner sieht man, daß es, je länger das Gestänge wird, um so weniger ausmacht, ob das obere Ende eingespannt (Kurve I, III und V) oder aufgehängt ist (Kurve II und IV).

Für kurze Gestänge ist das Eigengewicht gegenüber der Knickkraft nur von geringer Bedeutung. Bildet man

$$\bar{P}\,\bar{l}^2=\frac{P\,l^2}{E\cdot I},$$

so ist das gerade die Größe, die in der Eulerschen Knickformel im Falle I (oben eingespannt, unten frei) gleich $\frac{\pi^2}{4}$, im Falle II (oben und unten drehbar befestigt) gleich π^2, im Falle III und IV (einerseits eingespannt, andererseits drehbar befestigt), die im Falle der Vernachlässigung des Eigengewichtes, unabhängig davon, ob die Einspannung oben oder unten stattfindet, zu der gleichen Knicklast führen, etwa gleich $4{,}49^2$ und im Falle V (beiderseits eingespannter Stab) gleich $4\pi^2$ ist. In Bild 1 sind die entsprechenden Kurven eingetragen; man

sieht vor allem bei den beiden ersten Kurven, für die noch die Knickkraft für $\frac{1}{2}b$ berechnet ist, wie diese Kurven die Kurven der Knicklast für kleine Längen sehr gut annähern; und zwar müssen unsere Kurven, wie man sich leicht überlegt, immer größere Werte für die Knickkraft ergeben als die asymptotischen Kurven $\overline{P}\,\overline{l}^2 = c$, so daß sie in Bild 1 unterhalb dieser Kurven verlaufen.

I. Aufstellung der Gleichungen.

2. Drückt man einen senkrecht hängenden schweren, geraden Stab durch eine an seinem unteren Ende in der Stabrichtung wirkende Kraft P so weit zusammen, daß die neutrale Gleichgewichtslage gerade etwas überschritten wird und hält dann die Enden fest, so leisten beim Ausknicken die äußeren Kräfte keine Arbeit; es findet dabei nur eine Umlagerung der Formänderungsenergie statt. Die zur Krümmung des Längenelementes $\mathrm{d}x$ erforderliche Energie $\frac{1}{2} E I \left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$ wird dadurch gewonnen, daß sich dieses Element beim Ausknicken wieder um den Betrag $\left(\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2}-1\right)\mathrm{d}x$ dehnt, so daß die Energie $\frac{1}{2} H \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x$ frei wird, wo H die an dieser Stelle wirkende Druckkraft ist. Dabei ist angenommen, daß es sich beim Ausknicken nur um kleine Formänderungen handelt, so daß sich die Endpunkte des Elementes $\mathrm{d}x$ senkrecht zu der mit der geraden Stabachse zusammenfallenden x-Achse um das kleine Stück w verschieben. Der Unterschied der Formänderungsenergie für die gekrümmte Lage gegen die nichtausgeknickte ist also, wenn man I konstant nimmt,

$$J = \frac{E I}{2} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l H \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x = 0.$$

Die x-Richtung soll dabei positiv nach oben gerichtet sein und der Nullpunkt in das untere Ende des Stabes gelegt werden. Somit ist, wenn man die Stabmasse pro Längeneinheit mit μ und die am unteren Ende angreifende Druckkraft mit P bezeichnet

$$H = P - \mu g x.$$

Soll die ausgeknickte Lage eine Gleichgewichtslage sein, muß

$$J = \frac{E I}{2} \int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l (P - \mu g x) \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2{,}1)$$

ein Minimum sein, d. h. es besteht die notwendige Bedingung, daß

$$\delta J = \left\{ \begin{array}{l} E I \int_0^l \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \delta w}{\mathrm{d}x^2} \mathrm{d}x \\ \\ - P \int_0^l (P - \mu g x) \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\delta w}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} E I \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}\delta w}{\mathrm{d}x} \Big|_0^l - E I \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} \delta w \Big|_0^l + E I \int_0^l \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} \delta w \, \mathrm{d}x \\ \\ - (P - \mu g x) \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \delta w \Big|_0^l + \int_0^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[(P - \mu g x) \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right] \delta w \, \mathrm{d}x \end{array} \right\} = 0 \quad . \quad . \quad (2{,}2)$$

werden muß. In bekannter Weise ergibt sich daraus zunächst, durch Nullsetzen des Integranden, die Differentialgleichung des Problems

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + \frac{1}{E I} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[(P - \mu g x) \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2{,}3).$$

Setzt man hier zur Abkürzung

$$\frac{\mu g}{E I} = a \qquad \text{und} \qquad \frac{P}{\mu g} = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2{,}4),$$

wo b die Länge des unter Druck stehenden Stabteiles ist, während a die Dimension $1:l^3$ hat, und führt eine Integration aus, so lautet die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} + a\,(b-x)\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2{,}5).$$

Die Randbedingungen liest man ebenfalls aus (2,2) ab. Als geometrische Randbedingungen ergeben sich

1. für den nicht verschiebbaren Endpunkt $w = 0$
2. bei unveränderlicher Endrichtung $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0$

und als dynamische Bedingungen

3. falls keine Endmomente wirken $\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = 0$
4. falls am Ende keine Querkräfte wirken $\dfrac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} + a\,(b-x)\,\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0$

$\ldots\ldots$ (2,6).

Ist ein Stabende freiverschiebbar, so ist daher in (2,5) die Integrationskonstante k gleich Null zu setzen, so daß man in diesem Fall mit der verkürzten Gleichung auskommt. Will man sich auf die Bestimmung der Knicklast nicht zu langer Stäbe beschränken, kann man für die Lösung von (2,5) Potenzreihen mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen und durch Einsetzen in die Gleichung Rekursionsformeln für diese ableiten. Da hier auch asymptotische Ausdrücke für den Fall sehr langer Gestänge gewonnen werden sollen, empfiehlt es sich, um auf bekannte Funktionen zu kommen, die Substitution

$$\zeta = \frac{2}{3}\sqrt{a}\sqrt{(b-x)^3} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \sqrt[3]{\zeta}\cdot\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2{,}7)$$

zu machen. Es ergibt sich dann nach einfacher Umrechnung

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta} + \varphi\left(1 - \frac{1}{9\,\zeta^2}\right) = k\sqrt[3]{\frac{4}{9a^2}}\,\frac{1}{\zeta} = \frac{c_1}{\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2{,}8).$$

II. Das an einem Ende frei verschiebbare Gestänge.

3. Gestänge endlicher Länge. Da in diesem Falle $c_1 = 0$ ist, kann man die Lösung der verkürzten Differentialgleichung, einer Besselschen Gleichung, sofort hinschreiben; es wird

$$\varphi = c_2\,J_{\frac{1}{3}}(\zeta) + c_3\,J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = c_2\sqrt[3]{\zeta}\,J_{\frac{1}{3}}(\zeta) + c_3\sqrt[3]{\zeta}\,J_{-\frac{1}{3}}(\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3{,}1).$$

Tabellen für die Besselschen Funktionen mit dem Index $\frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{3}$ findet man z. B. in dem Buche von Watson[1]). Da man aber diese Funktionen noch mit $\sqrt[3]{\zeta}$ multiplizieren muß und außerdem Ableitungen und Integrale gebraucht, ist es meist vorteilhaft, auf die Reihenentwicklung der Besselschen Funktionen

$$J_\nu(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{i\zeta}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$$ [2]) $\ldots\ldots\ldots$ (3,2)

zurückzugehen. Daraus ergibt sich, wenn man für ζ wieder den Wert aus (2,7) einsetzt und wenn man zur Abkürzung noch

$$z = \sqrt[3]{a}\,(b-x), \quad \text{d. h.} \quad \zeta = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3{,}3)$$

einführt,

$$\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x} = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\left[z - \frac{z^4}{3\cdot 1!\,1\cdot 4} + \frac{z^7}{3^2\cdot 2!\,1\cdot 4\cdot 7} - \frac{z^{10}}{3^3\cdot 3!\,1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}\cdots\right] = f_2(z) \quad \ldots \quad (3{,}4),$$

[1]) G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge 1922.

[2]) z. B. R. Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. Leipzig und Berlin 1937, S. 38.

und ebenso für

$$\frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left[1-\frac{z^3}{3\cdot 1!\cdot 2}+\frac{z^6}{3^2\cdot 2!\,2\cdot 5}-\frac{z^9}{3^3\cdot 3!\cdot 2\cdot 5\cdot 8}\cdots\right]=f_3(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3{,}5).$$

Nun braucht man bei der Behandlung des Problemes nicht nur die Ableitungen von w, sondern auch w selbst. Durch Integration ergibt sich aus (3,1) zunächst einmal ohne Berücksichtigung der Grenzen, wenn man beachtet, daß $\sqrt[3]{\zeta}\,\mathrm{d}x=-\sqrt[3]{\frac{2}{3a}}\,\mathrm{d}\zeta$ ist,

$$w=-c_2\sqrt[3]{\frac{2}{3a}}\int J_{\frac{1}{3}}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta-c_3\sqrt[3]{\frac{2}{3a}}\int J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+c_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3{,}6).$$

Mit diesen Formeln lassen sich die Knicklasten von an einem Ende freien Gestängen bestimmen. Aus den Randbedingungen ergeben sich drei homogene Gleichungen für die c_2, c_3 und c_4, aus denen sich diese Größen nur berechnen lassen, wenn die Determinante ihrer Faktoren Null ist, und das gibt die Knickdeterminante.

Weyrich behandelt so z. B. den Fall des unten eingespannten Gestänges, das unter seiner Eigenlast ausknickt[3]). Da sich das Gestänge gerade selbst trägt, ist am oberen Ende $x=b$, also $z_o=0$, am unteren $x=0$, also $z_u=\sqrt[3]{a}\,b$. Die Randbedingungen sind für $z_o=0$ $\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=0$, d. h. wie man aus (3,4) und (3,5) erkennt, wenn man beachtet, daß $\mathrm{d}z=-\sqrt[3]{a}\,\mathrm{d}x$ ist, es muß $c_2=0$ werden. Am unteren Ende muß

$$c_3\sqrt[3]{\zeta}\,J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)=0,$$

$$-c_3\sqrt[3]{\frac{2}{3a}}\int J_{-\frac{1}{3}}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+c_4=0$$

sein. Aus der ersten Gleichung findet man den Wert von ζ_u für den $J_{-\frac{1}{3}}(\zeta_u)=0$. Aus den Tabellen von Watson[1]) oder aus den Tafeln von Jahnke-Emde[4]) findet man $\zeta_u=1{,}8663$ und damit nach (2,7) und (2,4)

$$l=1{,}9863\sqrt[3]{\frac{EI}{\mu g}} \quad \text{und} \quad P=1{,}9863\sqrt[3]{EI(\mu g)^2}.$$

Die zweite Gleichung, die hier nicht weiter interessiert, dient nach Einsetzen der Integralgrenzen zur Bestimmung von $c_4:c_3$.

Zum Vergleich sei ein Gestänge behandelt, das oben eingespannt und unten frei ist und auf das in der Stabrichtung von unten her eine Kraft P drückt. Das Gestänge habe zunächst einmal die Länge b, dann wird für $z_o=0$ $w=0$ und $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0$. Die erste Gleichung dient zur Bestimmung von $c_4:c_2$, die zweite ergibt, wenn man (3,4) und (3,5) beachtet, $c_3=0$. Am unteren Ende wird $\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=0$. Benutzt man die Reihe (3,4) und läßt den konstanten Faktor fort, ergibt sich z_u als erste Nullstelle der Reihe

$$1-\frac{z^3}{3\cdot 1!\cdot 1}+\frac{z^6}{3^2\cdot 2!\cdot 1\cdot 4}-\frac{z^9}{3^3\cdot 3!\cdot 1\cdot 4\cdot 7}+\frac{z^{12}}{3^4\cdot 4!\,1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}\cdots=0.$$

Durch Eingabeln findet man $z_u=1{,}53$, und damit nach (2,4)

$$l=1{,}53\sqrt[3]{\frac{EI}{\mu g}} \quad \text{und} \quad P=1{,}53\sqrt[3]{EI(\mu g)^2}.$$

Das ist eine wesentlich kleinere Knickkraft als im ersten Beispiel; eine Einspannung unten wirkt eben ganz anders auf einen schweren Stab als eine Einspannung oben. Für die gleiche Befestigung sind die Knicklasten noch für $l=\frac{b}{2}$, $\frac{3b}{2}$ und $2b$ berechnet. Die Knickkraft ergibt sich dann aus der Determinante

[3]) R. Weyrich: l. c. S. 131 ff.

[4]) Jahnke-Emde: Funktionstafeln. Leipzig und Berlin (3. Aufl.) 1938, S. 167.

$$\begin{vmatrix} f_2(z_0) & f_3(z_0) \\ \dfrac{\mathrm{d}\, f_2(z_u)}{\mathrm{d}\, z} & \dfrac{\mathrm{d}\, f_3(z_u)}{\mathrm{d}\, z} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3{,}7),$$

wo $z_u = \sqrt[3]{a\,b}$ und z_0 bzw. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{a\,b}$, $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a\,b}$, $-\sqrt[3]{a\,b}$, d. h. also gleich $\frac{1}{2}z_u$, $-\frac{1}{2}z_u$, $-z_u$ ist. Durch Eingabeln erhält man für z_u die Werte 2,25; 1,245; 1,113. Da es sich hier nur darum handelt, eine Übersicht zu gewinnen, ist die Eingabelung nicht sehr weit getrieben. Die letzte Stelle der hier und weiterhin angegebenen Werte für z_u kann ungenau sein. In Bild 1 sind diese Werte markiert und durch die mit I bezeichnete Kurve verbunden. Aus dieser Kurve kann man jetzt zu einem l des eingezeichneten Bereiches das zugehörige P entnehmen.

4. Sehr lange, unten freie Gestänge. Man sieht aus Bild 1, daß die Knickkraft mit wachsender Länge des Gestänges sich sehr wenig ändert, so daß man für sehr lange Gestänge mit ausreichender Näherung den Wert von P für $x \to \infty$ benutzen kann. Die Werte von ζ für $x > b$ werden imaginär, während, wie aus (3,4) und (3,5) folgt, $f_2(z)$ und $f_3(z)$ reell bleiben. Man muß also in (3,1) bei $\sqrt[3]{\zeta}$ denjenigen Wert der $\sqrt[3]{i}$ wählen, für den w reell bleibt. Man benutzt am einfachsten die Hankelschen asymptotischen Reihen für die Besselschen Funktionen[5]). Setzt man

$$P_\nu(\zeta) = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{(\nu, 2m)}{(2\zeta)^{2m}} + O(|\zeta|^{-2M}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4{,}1),$$

$$Q_\nu(\zeta) = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{(\nu, 2m+1)}{(2\zeta)^{2m+1}} + O(|\zeta|^{-2M-1}) \quad \ldots\ldots \quad (4{,}2),$$

so wird mit $\nu = \frac{1}{3}$ bzw. $-\frac{1}{3}$

$$J_{\frac{1}{3}}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\left[\cos\left(\zeta - \frac{5\pi}{12}\right) P_{\frac{1}{3}}(\zeta) - \sin\left(\zeta - \frac{5\pi}{12}\right) Q_{\frac{1}{3}}(\zeta)\right] \quad \ldots\ldots \quad (4{,}3),$$

$$J_{-\frac{1}{3}}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\left[\cos\left(\zeta - \frac{\pi}{12}\right) P_{-\frac{1}{3}}(\zeta) - \sin\left(\zeta - \frac{\pi}{12}\right) Q_{-\frac{1}{3}}(\zeta)\right] \quad \ldots\ldots \quad (4{,}5).$$

Es würde hier genügen, wenn man sich auf das erste Glied dieser Ausdrücke beschränkte, da aber nachher auch das zweite Glied gebraucht wird, seien für $\zeta = i\eta$ hier gleich die beiden ersten Glieder hingeschrieben. Es wird

$$\left.\begin{aligned} J_{\frac{1}{3}}(i\eta) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi i\eta}}\left[\cos\left(i\eta - \frac{5\pi}{12}\right) - \sin\left(i\eta - \frac{5\pi}{12}\right)\cdot\frac{1}{6i\eta}\right] \\ &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}\frac{e^\eta}{2}\left(1 - \frac{1}{6\eta}\right)e^{+\frac{i\pi}{6}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4{,}5);$$

um einen reellen Wert für $\frac{\mathrm{d}\, w_2}{\mathrm{d}\, x}$ zu bekommen, haben wir hier also $\sqrt[3]{i\eta} = \sqrt[3]{\eta}\, e^{\frac{5i\pi}{6}}$ zu setzen und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}\, w_2}{\mathrm{d}\, x} \approx -\sqrt[3]{\eta}\sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}\frac{e^\eta}{2}\left(1 - \frac{1}{6\eta}\right) = -\sqrt[3]{\eta}\, g(\eta)\left(1 - \frac{1}{6\eta}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4{,}6).$$

Ähnlich findet man mit $\sqrt[3]{i\eta} = \sqrt[3]{\eta}\, e^{\frac{i\pi}{6}}$

$$\frac{\mathrm{d}\, w_3}{\mathrm{d}\, x} \approx \sqrt[3]{\eta}\sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}\frac{e^\eta}{2}\left(1 + \frac{1}{6\eta}\right) = \sqrt[3]{\eta}\, g(\eta)\left(1 + \frac{1}{6\eta}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4{,}7).$$

Somit ergibt sich als Knickdeterminante aus (3,7), wenn man nur das erste Glied von (4,6) und (4,7) benutzt und den gemeinsamen Faktor $\sqrt[3]{\eta}\, g(\eta)$ fortläßt

[5]) R. Weyrich: l. c. S. 47.

$$\begin{vmatrix} -1 & +1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f_2(z_u) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f_3(z_u) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4{,}8),$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{9}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(1 - \frac{z^3}{3 \cdot 1} + \frac{z^6}{3^2 \cdot 2! \cdot 1 \cdot 4} - \frac{z^9}{3^3 \cdot 3! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7} \cdots\right)$$

$$+ \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{3\,\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \left(-\frac{3z^2}{3 \cdot 2} + \frac{6z^5}{3^2 \cdot 2! \cdot 2 \cdot 5} - \frac{9z^8}{3^3 \cdot 3! 2 \cdot 5 \cdot 8} + \cdots\right) = 0.$$

Die Werte der beiden Γ-Funktionen kann man aus den Tafeln von Jahnke-Emde entnehmen [6]). Man findet dann den Wert $z_u = 1{,}0188$. Für sehr lange Gestänge ist also die Knickkraft

$$P = 1{,}0188 \sqrt[3]{E\,I\,(\mu\,g)^2}.$$

Damit ist die zur l-Achse parallele Asymptote der Kurve I bestimmt.

III. Gestänge, deren Enden nicht seitwärts ausweichen können.

5. Gestänge endlicher Länge. Ist das eine Ende des Gestänges nicht frei verschiebbar, so wird die erste Integrationskonstante c_1 nicht gleich Null und man hat das Integral der vollständigen Gl. (2,8) zu benutzen. Nun pflegt man die Integrale der Gleichung

$$\eta'' + \frac{1}{\zeta}\eta' + \left(1 - \frac{\nu^2}{\zeta^2}\right)\eta = \frac{1}{\zeta^{\mu+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5{,}1)$$

als Lommelsche Funktionen zu bezeichnen [7]). Für sie hat man die Potenzreihenentwicklungen

$$s_{\mu,\nu}(\zeta) = \frac{\zeta^{\mu+1}}{(\mu+1)^2 - \nu^2} - \frac{\zeta^{\mu+3}}{[(\mu+1)^2 - \nu^2][(\mu+3)^2 - \nu^2]} + \cdots \quad \ldots \ldots \quad (5{,}2),$$

$$S_{\mu,\nu}(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{1-\mu}} \left[1 - \frac{(\mu-1)^2 - \nu^2}{\zeta^2} + \frac{[(\mu-1)^2 - \nu^2] \cdot [(\mu-3)^2 - \nu^2]}{\zeta^4} \cdots\right] \quad \ldots \quad (5{,}3),$$

die man nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten finden kann. Zwischen ihnen besteht der Zusammenhang [8])

$$\left.\begin{aligned} S_{\mu,\nu}(\zeta) = s_{\mu,\nu}(\zeta) + 2^{\mu-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\,\mu - \frac{1}{2}\,\nu + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\,\mu + \frac{1}{2}\,\nu + \frac{1}{2}\right) \\ \cdot \left[\sin\frac{1}{2}(\mu-\nu)\,\pi\,J_\nu(\zeta) - \cos\frac{1}{2}(\mu-\nu)\,\pi\,N_\nu(\zeta)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5{,}4).$$

Aus (5,1) ergibt sich die Gl. (2,8), wenn man $\mu = 0$ und $\nu = \frac{1}{3}$ setzt. Man erhält dann unter Benutzung von (5,2), wenn man wieder die Abkürzung (3,3) einführt,

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(z^2 - \frac{1}{20}z^5 + \frac{1}{20 \cdot 56}z^8 - \cdots\right) = f_1(z) \quad \ldots \ldots \quad (5{,}5).$$

Durch Integration findet man daraus ähnlich wie (3,6)

$$w_1 = -c_1 \sqrt[3]{\frac{2}{3a}} \int s_{0,\frac{1}{3}}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5{,}6).$$

Hat man nun z. B. ein an beiden Enden eingespanntes Gestänge, so ergeben sich die vier Randbedingungen

[6]) Jahnke-Emde: l. c. S. 14.

[7]) Watson: l. c. S. 345. Vgl. a. Nielsen: Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904, S. 48.

[8]) Watson: l. c. S. 347; Nielsen: l. c. S. 228.

$$\left.\begin{aligned} c_1 w_1(z_0) &+ c_2 w_2(z_0) &+ c_3 w_3(z_0) &+ c_4 = 0 \\ c_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} w_1(z_0) &+ c_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} w_2(z_0) &+ c_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} w_3(z_0) &= 0 \\ c_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} w_1(z_u) &+ c_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} w_2(z_u) &+ c_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} w_3(z_u) &= 0 \\ c_1 w_1(z_u) &+ c_2 w_2(z_u) &+ c_3 w_3(z_u) &+ c_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5{,}7).$$

Die Determinante der Faktoren der c_r gibt die Knickdeterminante. Ist das Gestänge an einem Ende nicht eingespannt, sondern drehbar gelagert, so treten hier an die Stelle der ersten Ableitungen die zweiten. Das kann natürlich auch an beiden Enden der Fall sein. Die Determinante läßt sich sofort in eine dreireihige umformen. Aus ihr sind unter Benutzung der Reihen (3,4), (3,5) und (5,5), ihrer Integrale, am einfachsten von $z=0$ aus genommen, und Ableitungen die Knickkräfte für $x=\frac{1}{2}b$, b, $\frac{3}{2}b$ und $2b$, also für $z_0=\frac{1}{2}z_u$, 0, $-\frac{1}{2}z_u$ und $-z_u$ durch Eingabeln berechnet. Für die z_u ergeben sich die folgenden Werte:

Länge des Gestänges	$\frac{1}{2}b$	b	$\frac{3}{2}b$	$2b$
beiderseits eingespannt	—	4,15	3,77	3,54
unten eingespannt, oben drehbar gelagert	—	3,78	3,54	3,39
unten drehbar gelagert, oben eingespannt	—	3,10	2,60	2,35
beiderseits drehbar gelagert.	3,59	2,64	2,28	2,15

Die Potenzreihen sind bei der Berechnung zum Teil bis z^{21} benutzt, doch ist die Rechnung nirgends so weit getrieben, daß die letzte Stelle garantiert werden könnte. Die Knickkraft ist in jedem Falle $P=z_u\sqrt[3]{EI(\mu g)^2}$, die Länge des Gestänges $l_{\frac{1}{2}b}=\frac{1}{2}z_u\sqrt[3]{\frac{EI}{\mu g}}$, $l_b=z_u\sqrt[3]{\frac{EI}{\mu g}}$ $l_{\frac{3}{2}b}=\frac{3}{2}z_u\sqrt[3]{\frac{EI}{\mu g}}$ bzw. $l_{2b}=2z_u\sqrt[3]{\frac{EI}{\mu g}}$. Die Punkte sind ebenfalls in Bild 1 eingetragen und durch die Kurven V, IV, III und II verbunden.

6. Sehr lange, an beiden Enden gelagerte Gestänge. Für sehr lange Gestänge braucht man wieder die asymptotischen Formeln, deren erste Glieder für $\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}x}$ bereits in (4,6) und (4,7) angegeben wurden. Um für $s_{0,\frac{1}{3}}(\zeta)$ aus (5,4) eine asymptotische Formel zu gewinnen, braucht man noch eine solche Formel für die Neumannsche Funktion. Es ist [8])

$$N_{\frac{1}{3}}(\zeta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\left[\sin\left(\zeta-\frac{5\pi}{12}\right)P_{\frac{1}{3}}(\zeta)+\cos\left(\zeta-\frac{5\pi}{12}\right)Q_{\frac{1}{3}}(\zeta)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6{,}1).$$

Setzt man diese Formel und (4,3) in (5,4) ein, faßt die trigonometrischen Funktionen mittels der Additionstheoreme zusammen, und beachtet ferner, daß $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ ist, so erhält man

$$s_{0,\frac{1}{3}}(\zeta)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\left[\sin\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)P_{\frac{1}{3}}(\zeta)+\cos\left(\zeta-\frac{\pi}{4}\right)Q_{\frac{1}{3}}(\zeta)\right]-S_{0,\frac{1}{3}}(\zeta) \quad \ldots \quad (6{,}2).$$

Dieser Wert muß multipliziert mit $\sqrt[3]{\zeta}$ für imaginäres $\zeta=i\eta$ reell werden, wie aus (5,5) zu ersehen ist. Das ist der Fall, wenn man für $\sqrt[3]{i\eta}$ den Wert $-i\sqrt[3]{\eta}$ nimmt. Beschränkt man sich auch hier auf die beiden ersten Glieder der Hankelschen Reihen, so wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x} &= \frac{\pi}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\eta}\sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}\frac{e^{\eta}}{2}e^{\frac{3i\pi}{2}}e^{-\frac{i\pi}{4}}e^{\frac{i\pi}{4}}\left(-\frac{1}{i}+\frac{1}{6i\eta}\right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\eta}\sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}\frac{e^{\eta}}{2}\left(1-\frac{1}{6\eta}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\eta}\,g(\eta)\left(1-\frac{1}{6\eta}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6{,}3).$$

Für die Integrale hat man, da das Integral der asymptotischen Näherung unter sehr allgemeinen Bedingungen, die hier erfüllt sind, eine asymptotische Näherung des Integrals ist, wenn man etwa von $\eta = 0$ ausgeht und $\mathrm{d}\eta = \sqrt[3]{\frac{3a}{2}}\,\sqrt[3]{\eta}\,\mathrm{d}x$ setzt,

$$w_1(\eta) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3a}}\int_0^{\eta} g(\eta)\left(1-\frac{1}{6\eta}\right)\mathrm{d}\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6{,}4)$$

und entsprechende Formeln für w_2 und w_3.

Ausführlich geschrieben lautet jetzt die Knickdeterminante für sehr große η

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3a}}\int_0^{\eta} g(\eta)\left(1-\frac{1}{6\eta}\right)\mathrm{d}\eta & -\sqrt[3]{\frac{2}{3a}}\int_0^{\eta} g(\eta)\left(1-\frac{1}{6\eta}\right)\mathrm{d}\eta & +\sqrt[3]{\frac{2}{3a}}\int_0^{\eta} g(\eta)\left(1+\frac{1}{6\eta}\right)\mathrm{d}\eta & 1 \\ \sqrt[3]{\eta}\,\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,g(\eta)\left(1-\frac{1}{6\eta}\right) & -\sqrt[3]{\eta}\,g(\eta)\left(1-\frac{1}{6\eta}\right) & \sqrt[3]{\eta}\,g(\eta)\left(1+\frac{1}{6\eta}\right) & 0 \\ \left(\frac{\mathrm{d}w_1(z)}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_u} & \left(\frac{\mathrm{d}w_2(z)}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_u} & \left(\frac{\mathrm{d}w_3(z)}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_u} & 0 \\ w_1(z_u) & w_2(z_u) & w_3(z_u) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6{,}5)$$

Entwickelt man nach den Gliedern der letzten Spalte, erhält man zwei dreireihige Determinanten, deren erste man wieder nach den Gliedern der ersten und zweiten Reihe in vier Determinanten aufspalten kann. Setzt man dabei der kürzeren Schreibweise wegen

$$G_1(\eta) = \int_0^{\eta} g(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \qquad G_2(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{1}{\eta}\,g(\eta)\,\mathrm{d}\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6{,}6)$$

und nimmt aus den Determinanten die gemeinsamen Faktoren heraus, so erhält man, wenn man noch durch $\sqrt[3]{\frac{2}{3a}}$ dividiert:

$$\left.\begin{aligned} & G_1(\eta)\,\sqrt[3]{\eta}\,g(\eta)\begin{vmatrix} +\frac{\pi}{\sqrt{3}} & -1 & +1 \\ +\frac{\pi}{\sqrt{3}} & -1 & +1 \\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}z} \end{vmatrix} + G_1(\eta)\,\frac{\sqrt[3]{\eta}}{\eta}\,g(\eta)\begin{vmatrix} +\frac{\pi}{\sqrt{3}} & -1 & +1 \\ -\frac{\pi}{\sqrt{3}} & +1 & +1 \\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}z} \end{vmatrix} \\ & + G_2(\eta)\,\sqrt[3]{\eta}\,g(\eta)\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{\sqrt{3}} & +1 & +1 \\ +\frac{\pi}{\sqrt{3}} & -1 & +1 \\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}z} \end{vmatrix} + G_2(\eta)\,\frac{\sqrt[3]{\eta}}{\eta}\,g(\eta)\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{\sqrt{3}} & +1 & +1 \\ -\frac{\pi}{\sqrt{3}} & +1 & +1 \\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}z} \end{vmatrix} \\ & -\sqrt[3]{\frac{3a}{2}}\,\sqrt[3]{\eta}\,g(\eta)\begin{vmatrix} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{6\eta}\right) & -\left(1-\frac{1}{6\eta}\right) & \left(1+\frac{1}{6\eta}\right) \\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}z} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6{,}7).$$

Die erste und vierte Determinante in (6,7) werden Null, weil die erste Reihe darin gleich der zweiten ist. Dividiert man nun durch $G_1(\eta)\,\frac{\sqrt[3]{\eta}}{\eta}\,g(\eta)$, so tritt als Faktor der zweiten und der dritten Determinante, die sich ja nur durch das Vorzeichen unterscheiden,

$$F(\eta)=1-\frac{\eta\, G_2(\eta)}{G_1(\eta)}$$

auf und als Faktor der letzten $\sqrt[3]{\frac{3a}{2}}\,\frac{\eta}{G_1(\eta)}$. Der erste Faktor wird für sehr große η von der Größenordnung $\frac{1}{\eta}$, der zweite dagegen von der Ordnung $\frac{\sqrt{\eta}}{e^{\eta}}$. Hätte man in der asymptotischen Näherung noch weitere Terme genommen, so würden diese mit wachsendem η ebenfalls stärker gegen Null gehen, als der Faktor des ersten Gliedes. Dividiert man nun noch durch $F(\eta)$ und läßt $\eta\to\infty$ gehen, so ergibt sich: Es muß für unendlich lange Gestänge

$$\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{\sqrt{3}} & +1 & +1 \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} & -1 & +1 \\ \frac{dw_1}{dz} & \frac{dw_2}{dz} & \frac{dw_3}{dz} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \frac{\pi}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{dw_1(z_u)}{dz} & \frac{dw_2(z_u)}{dz} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6{,}8)$$

werden. Das ergibt unter Benutzung der Reihen (3,4) und (5,5) $z_u=3{,}09$, also $P=3{,}09\,\sqrt[3]{E\,I\,(\mu\,g)^2}$. Dieser Wert ist unabhängig davon, ob das Gestänge im Unendlichen eingespannt oder drehbar aufgehängt ist, wie man leicht unter Benutzung der Formeln

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\nu}\,Z_{\nu}(z)\right)=z^{\nu}\,Z_{\nu-1}(z); \qquad \frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}\,Z_{\nu}(z)\right)=-z^{-\nu}\,Z_{\nu+1}(z),$$

die für alle Besselschen Funktionen Z_ν gelten, erkennt[9]). Es ist also damit die zur $\bar{l}$-Achse parallele Asymptote der Kurven V und IV gefunden.

Setzt man in (6,8) statt der ersten Ableitungen von w die zweite ein, bekommt man die Knickkraft des unendlich langen, unten drehbar gelagerten Gestänges. Es ergibt sich $z_u=1{,}88$, also $P=1{,}88\,\sqrt[3]{E\,I\,(\mu\,g)^2}$. Dieser Wert bestimmt die zur $\bar{l}$-Achse parallele Asymptote der beiden Kurven III und II des Bildes 1.

IV. Einfluß des hydrostatischen Druckes auf die Knickkraft.

7. Mit Hilfe der Kurven unseres Bildes 1 läßt sich z. B. die Frage nach dem Einfluß des hydrostatischen Druckes auf die Knickkraft beantworten. Die Folge des Eintauchens des Gestänges in eine Flüssigkeit ist die Verminderung des Gewichtes der Längeneinheit von $\mu\,g$ auf $\overline{\mu\,g}$. Infolgedessen erhält man zu einem gegebenen l einen Wert $\bar{l}_e$, der um den Faktor $\sqrt[3]{\frac{\overline{\mu\,g}}{\mu\,g}}$ kleiner ist als das $\bar{l}$ für das nicht eintauchende Gestänge. Zu dem kleineren $\bar{l}_e$ gehört ein $\overline{P}_e$, das größer ist als das zu $\bar{l}$ gehörende $\overline{P}$. Berechnet man nun P aus $\overline{P}_e$, so ist dieses mit einem Faktor zu multiplizieren, der um $\sqrt[3]{\left(\frac{\overline{\mu\,g}}{\mu\,g}\right)^2}$ kleiner ist, als der mit dem $\overline{P}$ zu multiplizieren ist. Man würde in beiden Fällen zu dem gleichen Wert P kommen, wenn die Punkte $\overline{P}_e$ und $\overline{P}$ auf einer Kurve

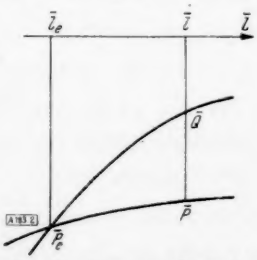


Bild 2. Zur Änderung der Knickkraft durch hydrostatischen Druck.

$$\overline{P}_e\cdot\bar{l}_e^{\,2}=\overline{P}\cdot\bar{l}^2=\frac{P\cdot l^2}{E\,I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7{,}1)$$

lägen. Diese Kurven verlaufen aber überall wesentlich steiler als unsere Knickkraftkurven. Infolgedessen schneidet die durch $\overline{P}_e$ gehende Kurve auf der Parallelen zur $\overline{P}$-Achse durch $\bar{l}$ ein $\bar{Q}<\overline{P}$ ab. Da also

$$\overline{P}_e\cdot\bar{l}_e^{\,2}=\bar{Q}\cdot\bar{l}^2<\overline{P}\cdot\bar{l}^2$$

ist, führt nach Gl. (7,1) $\overline{P}_e$ zu einer kleineren Knickkraft als $\overline{P}$. Durch den hydrostatischen Druck wird also die Knickkraft vermindert. 183

[9]) Jahnke-Emde: l. c. S. 145.

Statistische Schätzungen auf kombinatorischer Grundlage.

Von *Hermann von Schelling* in Berlin.

Durch ein einheitliches, rein kombinatorisches Verfahren gelingt es, die Sicherheit des arithmetischen Mittels von n Beobachtungen einer stetigen Größe zu beurteilen und die Differenz zweier solcher Durchschnitte zu begutachten. Durch Spezialisierung ist es möglich, die Zuverlässigkeit der beobachteten Häufigkeit eines alternativen Merkmals zu schätzen und den Unterschied zweier solcher Häufigkeiten zu untersuchen. Die bisher üblichen Formeln erfahren teils eine wichtige Verallgemeinerung, teils aber auch eine wesentliche Berichtigung.

I. Die Genauigkeit des Mittelwertes bei Stichproben aus einer endlichen Gesamtheit.

Aus einer Gesamtheit von N Gliedern greifen wir n Elemente heraus und messen an jedem eine stetig veränderliche Größe x, so daß wir die Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erhalten. Aus ihnen bilden wir das arithmetische Mittel $M = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ und fragen, wie stark es höchstens von dem arithmetischen Mittel $\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)$ abweichen kann, das wir fänden, wenn wir die Messungen auf alle Glieder der Gesamtheit erstreckten. Aus der N-gliedrigen Gesamtheit $x_1, x_2, \ldots, x_N$ denken wir uns alle $\binom{N}{n}$ Stichproben von je n Elementen entnommen und für jede das arithmetische Mittel M berechnet. So entstehen $\binom{N}{n}$ Werte für die statistische Größe M. Es ist möglich, die ersten drei Momente dieser M-Verteilung zu bestimmen. Zunächst haben wir:

$$\left.\begin{aligned} E(M) &= \frac{1}{n}\cdot\frac{\binom{n}{1}}{\binom{N}{1}}\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i \\ E(M^2) &= \frac{1}{n^2}\left[\frac{\binom{n}{1}}{\binom{N}{1}}\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{\binom{n}{2}}{\binom{N}{2}}\cdot 2\sum_{i,j}^{N} x_i x_j\right] \\ E(M^3) &= \frac{1}{n^3}\left[\frac{\binom{n}{1}}{\binom{N}{1}}\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i^3 + \frac{2\binom{n}{2}}{2\binom{N}{2}}\cdot 3\sum_{i,j}^{N} x_i^2 x_j + \frac{\binom{n}{3}}{\binom{N}{3}}\cdot 6\sum_{i,j,k}^{N} x_i x_j x_k\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1).$$

Die Einführung folgender Potenzsummen liegt nahe:

$$S_\lambda = \sum_{i=1}^{N} x_i^\lambda \quad \ldots \quad (2).$$

Dann gelten nach bekannten Sätzen über symmetrische Funktionen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} 2\sum_{i,j}^{N} x_i x_j &= S_1^2 - S_2; \qquad 3\sum_{i,j}^{N} x_i^2 x_j = 3(S_1 S_2 - S_3); \\ 6\sum_{i,j,k}^{N} x_i x_j x_k &= 2S_3 - 3S_1 S_2 + S_1^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Nach kurzen Umformungen finden wir:

$$\left.\begin{aligned} E(M) &= \frac{1}{N}S_1 = \bar{x} \\ E(M^2) &= \frac{1}{nN(N-1)}[(N-n)S_2 + (n-1)S_1^2] \\ E(M^3) &= \frac{1}{n^2 N(N-1)(N-2)}[(N-n)(N-2n)S_3 + 3(N-n)(n-1)S_1 S_2 + (n-1)(n-2)S_1^3] \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

In üblicher Weise erhalten wir die Momente um $E(M)=\bar{x}$:

$$\left.\begin{aligned} E(M-x)^2 &= \sigma^2(M)=\frac{N-n}{n(N-1)}\left[\frac{1}{N}S_2-\left(\frac{S_1}{N}\right)^2\right]=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\mu_2(x_N)}{n} \\ E(M-x)^3 &= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{N-2n}{N-2}\left[\frac{1}{N}S_3-\frac{3}{N^2}S_1S_2+2\left(\frac{S_1}{N}\right)^3\right]=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{N-2n}{N-2}\cdot\frac{\mu_3(x_N)}{n^2} \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Hierbei bedeuten $\mu_2(x_N)$ und $\mu_3(x_N)$ die unbekannten zweiten und dritten Momente um $\bar{x}$ innerhalb der N-gliedrigen Gesamtheit. Eine ähnlich einfache Formel für das vierte Moment gilt leider nicht mehr, weshalb auf diese Größe nicht eingegangen werden soll. Dagegen muß der Begriff der Schiefe $\varrho(x_N)=\mu_3(x_N):[\mu_2(x_N)]^{\frac{3}{2}}$ noch herangezogen werden. Der angeschriebene Ausdruck gilt für die Gesamtheit. Für die Schiefe $\varrho(M)$ der M-Verteilung finden wir nach (5) den Wert

$$\varrho(M)=\frac{N-2n}{N-2}\cdot\sqrt{\frac{N-1}{N-n}}\cdot\frac{\varrho(x_N)}{\sqrt{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a).$$

In den bisherigen Formeln für die Momente von M kommen noch die unbekannten Momente zweiter und dritter Ordnung $\mu_2(x_N)$ und $\mu_3(x_N)$ der N-gliedrigen Gesamtheit vor. Sie müssen eliminiert werden, was allerdings nur durch optimale Schätzungen möglich ist. Wenn wir für alle n-gliedrigen Stichproben, deren Anzahl $\binom{N}{n}$ ist, die zweiten und dritten Momente bilden, so erhalten wir aus diesen Stichprobenverteilungen folgende strenge Erwartungswerte:

$$\left.\begin{aligned} E[\mu_2(x_n)] &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{N}{N-1}\mu_2(x_N) \\ E[\mu_3(x_n)] &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{N}{N-1}\cdot\frac{N}{N-2}\mu_3(x_N) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Daraus entnehmen wir die optimalen Schätzungen:

$$\left.\begin{aligned} \mu_2(x_N) &= \frac{n}{n-1}\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\mu_2(x_n) \\ \mu_3(x_N) &= \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N}\cdot\mu_3(x_n) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a).$$

Die erste Zeile von (6a) liefert für sehr große N die bekannte Behauptung, daß die „wahre" Streuung gleich dem $\frac{n}{n-1}$-fachen der beobachteten Streuung ist. Wir haben sie hier durch unser kombinatorisches Verfahren bewiesen, ohne Annahmen über die Verteilung in der Gesamtheit zu machen. Allerdings gilt die Beziehung nicht streng, sondern sie stellt nur eine optimale Schätzung dar, was vielleicht manchmal vergessen wird. Unser Ausdruck ist etwas genauer als der übliche, da der hinzutretende Faktor $\frac{N-1}{N}$ bewirkt, daß für die uneigentliche Stichprobe $n=N$ sich, wie es sein muß, die Identität $\mu_2(x_N)\equiv\mu_2(x_N)$ ergibt. Entsprechendes gilt für den Faktor $\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N}$ in der Formel für das dritte Moment, für die mir übrigens kein Beleg aus der Literatur zur Hand ist.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun endlich möglich, optimale Schätzungen für Erwartungswert, Streuung und Schiefe von $M=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ bei einer Entnahme dieser n-gliedrigen Stichprobe aus einer Gesamtheit von N Elementen anzugeben. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} E(M) &= \bar{x} \\ \sigma^2(M) &= \frac{N-n}{N}\cdot\frac{s^2(x_n)}{n-1} \\ \varrho(M) &= \sqrt{\frac{N-2n}{N}\cdot\frac{N-2n}{N-n}\cdot\frac{n-1}{n-2}}\cdot\frac{\varrho(x_n)}{\sqrt{n-2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

wobei $s^2(x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-M)^2$ die beobachtete Streuung und $\varrho(x_n)$ die beobachtete Schiefe der Stichprobe sind. Zunächst betrachten wir die Schiefe. Sie verschwindet, wenn $n=\frac{N}{2}$ ist.

Für große N und nicht allzu kleine n ist genähert $\varrho(M) = \frac{\varrho(x_n)}{\sqrt{n-2}}$. Daraus wird ersichtlich, daß die Verteilung von M auf jeden Fall wesentlich symmetrischer ist als die beobachtete Stichprobe. Diese Bemerkung ist wichtig für die Beantwortung der naheliegenden Frage, ob man berechtigt ist, an M einfach positiv und negativ das k-fache des mittleren Fehlers von M anzubringen. Im allgemeinen wird die geringe Schiefe ganz zu vernachlässigen sein, so daß die Methode gestattet ist. Da das vierte Moment nicht berechnet ist und je nach der Gesamtheit verschieden ausfallen würde, führt das beiderseitige Anbringen des dreifachen mittleren Fehlers nicht streng zu der Restwahrscheinlichkeit von 0.27 ‰, die man von der normalen Verteilung her gewohnt ist. Jedoch pflegt erfahrungsgemäß die Spanne von 6σ bei gering asymmetrischen Verteilungen stets einen sehr hohen Prozentsatz zu umfassen, so daß man mit außerordentlicher, wenn auch numerisch nicht genau definierbarer Wahrscheinlichkeit sagen kann, es müsse

$$M - 3\,\sigma(M) \leqq \bar{x} \leqq M + 3\,\sigma(M)$$

oder ausführlicher

$$M - 3\sqrt{\frac{N-n}{N}\cdot\frac{1}{n-1}}\cdot s(x_n) \leqq \bar{x} \leqq M + 3\sqrt{\frac{N-n}{N}\cdot\frac{1}{n-1}}\cdot s(x_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

gelten.

Damit sind die Mutungsgrenzen für das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der N-gliedrigen Gesamtheit gefunden, aus der n Elemente vermessen worden sind. Für die uneigentliche Stichprobe, also für $n = N$ ergibt sich streng richtig $M = \bar{x}$. Wenn N über alle Grenzen wächst, so erhält man die im Schrifttum übliche Beziehung.

Für den Praktiker ist unsere Formel aber viel wert. Bei einer anthropometrischen Aufnahme bestehe z. B. die Absicht, an allen Männern zwischen 20 und 59 Jahren, die in einem Dorfe ansässig sind, die Körpergröße zu messen und dann ihren Durchschnitt $\bar{x}$ zu bestimmen. Einige junge Leute sind aber zum Wehrdienst eingezogen und nicht erreichbar. Es ist somit im Augenblick nur möglich, den Durchschnitt M für die anwesenden Männer zu ermitteln. Die Gl. (8) setzt uns in den Stand, Mutungsgrenzen für den unbekannten $\bar{x}$-Wert aufzustellen, die wesentlich enger ausfallen, als wenn wir uns der üblichen Formel bedienten. Nach dieser hätte die Stichprobe $n' = n \cdot \frac{N-1}{N-n}$ statt n Glieder enthalten müssen, wenn die gleiche geringe Unsicherheit herauskommen sollte.

Wird nicht eine stetige Größe x gemessen, sondern geprüft, ob ein bestimmtes alternatives Merkmal vorhanden ist oder nicht, so können wir der Größe x im ersten Fall den Wert $+1$, im zweiten Fall den Wert 0 zuschreiben. Dann ergeben die Ausdrücke M und $\bar{x}$ die Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe und in der Gesamtheit. Die Besonderheit des Falles besteht nun darin, daß sich die Streuung $\mu_2(x_N)$ in der Gesamtheit durch den zugehörigen Erwartungswert $\bar{x}$ streng ausdrücken läßt. Es ist nämlich $\mu_2(x_N) = \bar{x}(1-\bar{x})$. Somit folgt nach (5) aus

$$M \pm k\,\sigma(M) = \bar{x},$$

$$(\bar{x} - M)^2 = k^2 \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}.$$

Benutzen wir wieder die Abkürzung $n' = n \cdot \frac{N-1}{N-n}$, so haben wir:

$$(\bar{x} - M)^2 = k^2 \cdot \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n'}.$$

Die Auflösung der quadratischen Gleichung liefert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n' + k^2}\left(M n' + \frac{k^2}{2} \pm k\sqrt{n'\,M(1-M) + \frac{k^2}{4}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Wächst N über alle Grenzen, so geht n' nach n. Dann ergibt die Gl. (9) die von R. Prigge [3][1]) aufgestellten Mutungsgrenzen für den wahren Anteil der Merkmalsträger. Ich habe diese Grenzen für $k = 1, 2, 3$ in ausreichendem Maße tabuliert [4 b]. Es ist beachtlich und wird hier zum ersten Male erwähnt, daß diese Tafeln auch dann angewendet werden können, wenn die n-gliedrige Stichprobe nicht einem unendlichen Kollektiv, sondern einer Gesamtheit von N Elementen entstammt. Man läßt den beobachteten Prozentsatz $M\left(=\frac{n_1}{n}=p_1 \text{ der Tafeln}\right)$ der Merkmalsträger unverändert, benutzt aber statt n die Größe $n' = n \cdot \frac{N-1}{N-n}$.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Als Beispiel betrachten wir folgende Aufgabe. Von einem Stammelternpaar sind bisher 31 Kinder und Kindeskinder entsprossen. Von ihnen konnten 25 daraufhin untersucht werden, ob sie ein bestimmtes Merkmal aufweisen oder nicht. Man fand 10 Merkmalsträger. Für die restlichen 6 bereits verstorbenen Familienmitglieder war eine Entscheidung nicht mehr möglich. Die Mutungsgrenzen der wahren Häufigkeit $\bar{x}$ des Merkmals innerhalb dieser Sippe sind gesucht.

Es ist $$N = 31, \quad n = 25, \quad M = \frac{10}{25} = 40\,\%.$$

Wir finden $$n' = n \cdot \frac{N-1}{N-n} = 125.$$

Für $k = 3$, $n' = 125$, $M\,(= p_1$ der Tafel$) = 40\,\%$

lesen wir aus der Tabelle ab:

$$30.0\,\% < \bar{x} < 53.3\,\%.$$

Wenn man den Umstand nicht berücksichtigt, daß die Sippe 31 Köpfe zählt, so entnimmt man aus der Tafel für $k = 3$, $n = 25$, $n_1 = 10$ die Grenzen

$$23.14\,\% < \bar{x} < 59.63\,\%,$$

die wesentlich weiter sind. Die auf Grund unserer kombinatorischen Methode erzielte Verfeinerung kann sich also sehr nützlich auswirken, wenn es sich um Stichproben aus klar definierten endlichen Gesamtheiten handelt.

II. Verfahren zur Beurteilung der Differenz zweier solcher Mittelwerte.

1. Methode für den Fall, daß die Lage der Differenz unbekannt ist. Soll bei Messungen einer stetig veränderlichen Größe das arithmetische Mittel einer Stichprobe von n_1 Gliedern aus einer Gesamtheit von N_1 Elementen mit dem arithmetischen Mittel einer n_2-gliedrigen Stichprobe aus einem Kollektiv des Umfangs N_2 verglichen werden, so liefert auch das kombinatorische Verfahren in aller Strenge die bekannte Formel $\sigma^2(M_1 - M_2) = \sigma^2(M_1) + \sigma^2(M_2)$. Allerdings müssen die auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Streuungen nach Formel (7) und nicht nach den nur für sehr große N_1, N_2 gültigen üblichen Ausdrücken berechnet werden.

Ergiebiger wird diese Betrachtung, wenn die Messungsergebnisse in den beiden Reihen nur aus den Werten $+1$ und 0 bestehen, wenn wir es also mit einem alternativen Merkmal zu tun haben. Statt auf die Gl. (7) können wir dann auf die exakte Formel (5) zurückgehen. Wir schreiben also:

$$\sigma^2(d) = \frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \cdot \frac{\mu_2(x_{N_1})}{n_1} + \frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \cdot \frac{\mu_2(y_{N_2})}{n_2},$$

wobei wir die Messungen in der zweiten Reihe mit y bezeichnen. Nun gilt, wie schon erwähnt worden ist, für Alternativen streng $\mu_2(x_{N_1}) = \bar{x}(1-\bar{x})$, $\mu_2(y_{N_2}) = \bar{y}(1-\bar{y})$. Die Gleichung $d_{\text{beob.}} = (\bar{x} - \bar{y}) \pm k\,\sigma(d)$ lautet also ausführlich

$$[d_{\text{beob.}} - (\bar{x} - \bar{y})]^2 = k^2 \left[\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \cdot \frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n_1} + \frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \cdot \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{n_2} \right].$$

Mit unseren üblichen Abkürzungen $n_1' = n_1 \cdot \dfrac{N_1 - 1}{N_1 - n_1}$, $n_2' = n_2 \cdot \dfrac{N_2 - 1}{N_2 - n_2}$ haben wir einfacher

$$[d_{\text{beob.}} - (x - \bar{y})]^2 = k^2 \left[\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n_1'} + \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{n_2'} \right].$$

Ausmultipliziert ergäbe sich eine allgemeine quadratische Gleichung in $\bar{x}$ und $\bar{y}$, welche bei geometrischer Deutung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem eine Ellipse in nicht ausgezeichneter Lage darstellt. Jeder Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ innerhalb dieser Mutungsellipse liefert ein Wertepaar $\bar{x}$, $\bar{y}$, das mit einer gewissen noch zulässigen Wahrscheinlichkeit den wirklichen Werten entsprechen könnte. Uns interessieren bei dieser Betrachtung aber nicht die Werte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ einzeln, sondern nur die Differenz $d = \bar{x} - \bar{y}$. Die Gleichung $\bar{x} - \bar{y} = D$ mit unbestimmtem D stellt geometrisch eine Schar paralleler Geraden dar, die mit der $\bar{x}$-Achse den Winkel 45° einschließen. Zwei Gerade dieser Schar,

$$\bar{x} - \bar{y} = D' \quad \text{und} \quad \bar{x} - \bar{y} = D''$$

berühren die Mutungsellipse. Es gilt dann für die Differenz $d = \bar{x} - \bar{y}$ der Koordinaten eines jeden inneren Punktes der Ellipse die Beziehung

$$D' \leqq d \leqq D''.$$

Somit sind D' und D'' als die Mutungsgrenzen der echten Differenz $d = \bar{x} - \bar{y}$ erkannt.

Die tatsächliche Berechnung dieser Grenzen ist etwas langwierig aber elementar. Ich will hier darum nur das Resultat angeben. Man hat die Geradenschar mit der Ellipse zum

Schnitt zu bringen und darauf zu achten, für welche Geraden die beiden Schnittpunkte zusammenfallen. Das sind die gesuchten Tangenten. Für sie gilt

$$\left.\begin{matrix} D' \\ D'' \end{matrix}\right\} = \frac{1}{(n_1' + n_2') + k^2} \left\{ (n_1' + n_2')\, d_{\text{beob.}} \right. \\ \left. \mp k \sqrt{\frac{n_1' + n_2'}{4\, n_1'\, n_2'} \left[(n_1' + n_2')^2 - 4\, n_1'\, n_2'\, d^2_{\text{beob.}} + k^2 (n_1' + n_2') \right]} \right\} \quad \ldots \quad (10).$$

Eine wesentliche Vereinfachung tritt für $n_1' = n_2' = n'$ ein. Dann hat man

$$\left.\begin{matrix} D' \\ D'' \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\, n' + k^2} \left\{ 2\, n'\, d_{\text{beob.}} \mp k \sqrt{2\, n' \left(1 - d^2_{\text{beob.}}\right) + k^2} \right\} \quad \ldots \quad (10a).$$

Wenn über die Größe der Gesamtheiten nichts bekannt ist, wird man N_1 und N_2 als unendlich voraussetzen. In diesem Falle ist $n_1' = n_1$, $n_2' = n_2$.

Als Daten sind außer dem Umfang der beiden Reihen nur die Differenz $d_{\text{beob.}} = \bar{x}_{\text{beob.}} - \bar{y}_{\text{beob.}}$ selbst, nicht auch $\bar{x}_{\text{beob.}}$ und $\bar{y}_{\text{beob.}}$ einzeln benutzt worden. Diese Größen pflegt man meistens zu kennen. Ein Verfahren, das nicht alle Informationen ausnutzt, hat stets einen verminderten Wirkungsgrad. Die durch die Gl. (10) bestimmten Grenzen sind daher in der Regel zu weit.

Hin und wieder ergibt sich aber eine Gelegenheit, bei der man auf die Formel (10) wirklich angewiesen ist. Eine Firma berichte etwa, sie habe im letzten Jahre nur 150 Stück einer bestimmten Maschine abgesetzt, während es im Vorjahre 180 Stück gewesen seien. Da aber der Anteil der höherwertigen Ausführung um 23 % gestiegen sei, habe der Umsatzwert keinen Rückgang erfahren. Der Zug zur Qualität werde vermutlich anhalten. Mit $n_1' = n_1 = 150$, $n_2' = n_2 = 180$, $d_{\text{beob.}} = +0.23$ und $k = 3$ erhält man nach (10) $D' = +6.45\,\%$, $D'' = +38.33\,\%$. Auch die untere Grenze ist positiv. Der Zug zur Qualität beruht also nicht auf Zufall, das kann man trotz der absichtlich verschleiernden Darstellung des Berichtes auf diese Weise nachprüfen.

2. Durchführung eines Ansatzes von R. A. Fisher. Zum Vergleich zweier arithmetischer Mittel gibt es noch ein anderes Verfahren, bei dem alle Daten voll ausgenutzt werden. In der Praxis wird sehr oft die Frage gestellt, ob zwei Reihen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ als Stichproben aus der gleichen Gesamtheit angesehen werden können oder nicht. Lautet die Antwort bejahend, so sind die Mittelwerte $M_x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i$ und $M_y = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j$ Zufallsvarianten des arithmetischen Durchschnitts dieser Gesamtheit. Diese Überlegung hat R. A. Fisher [1, 2] zu dem Gedanken angeregt, die beiden Reihen zu einer einzigen Reihe $z_1, z_2, \ldots, z_N$ zusammenzuwerfen, wobei $N = m + n$ ist. Dann denkt er sich die Reihe auf alle $N!:(m!\,n!)$ Arten in zwei Abschnitte der Längen m und n zerlegt und für diese jeweils die Mittel M_x und M_y berechnet. Er stellt sich vor, man zähle ab, wie oft die Differenz $d = M_x - M_y$ extremer auffällt als bei dem empirischen Reihenpaar. Auf diese Art läßt sich beurteilen, ob die gegebenen Reihen als zufällige Stichproben aus einer einzigen Gesamtheit aufgefaßt werden können oder nicht.

Wirklich durchführbar ist dieses Verfahren natürlich nur für ganz kurze Reihen. Fisher scheint aber übersehen zu haben, daß sich die ersten drei Momente von d einfach bilden lassen. So ist also ein Vergleich zwischen $d_{\text{beob.}}$ und dem mittleren Fehler $\sigma(d)$ möglich. Ich habe diese bisher offenbar nicht bekannte Tatsache schon kurz angezeigt [4 d] und will hier den Beweis folgen lassen. Man findet zunächst:

$$E(d) = \frac{1}{\binom{N}{1}} \left(\frac{\binom{m}{1}}{m} - \frac{\binom{n}{1}}{n} \right) \cdot \sum_{k=1}^{N} z_k = 0$$

$$E(d^2) = \frac{1}{\binom{N}{1}} \left(\frac{\binom{m}{1}}{m^2} + \frac{\binom{n}{1}}{n^2} \right) \cdot \sum_{k=1}^{N} z_k^2 + \frac{1}{\binom{N}{2}} \left(\frac{\binom{m}{2}}{m^2} + \frac{\binom{n}{2}}{n^2} - \frac{m\,n}{m\,n} \right) \cdot 2 \sum_{\substack{k,l \\ 1}}^{N} z_k\, z_l$$

$$E(d^3) = \frac{1}{\binom{N}{1}} \left(\frac{\binom{m}{1}}{m^3} - \frac{\binom{n}{1}}{n^3} \right) \cdot \sum_{k=1}^{N} z_k^3 + \frac{1}{2\binom{N}{2}} \left(\frac{2\binom{m}{2}}{m^3} - \frac{2\binom{n}{2}}{n^3} - \frac{m\,n}{m^2\,n} + \frac{m\,n}{m\,n^2} \right) \cdot 3 \sum_{\substack{k,l \\ 1}}^{N} z_k^2\, z_l$$

$$+ \frac{1}{\binom{N}{3}} \left(\frac{\binom{m}{3}}{m^3} - \frac{\binom{n}{3}}{n^3} - \frac{\binom{m}{2} n}{m^2\,n} + \frac{m \binom{n}{2}}{m\,n^2} \right) \cdot 6 \sum_{\substack{k,l,r \\ 1}}^{N} z_k\, z_l\, z_r \qquad (11).$$

Wir führen wieder die Potenzsummen

$$S_\lambda = \sum_{k=1}^{N} z_k^\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

ein und erinnern an

$$\left.\begin{aligned} 2\sum_{\substack{k,l\\1}}^{N} z_k z_l &= S_1^2 - S_2; \qquad 3\sum_{\substack{k,l\\1}}^{N} z_k^2 z_l = 3(S_1 S_2 - S_3);\\ 6\sum_{\substack{k,l,r\\1}}^{N} z_k z_l z_r &= 2S_3 - 3S_1 S_2 + S_1^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Damit erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} E(d) &= 0\\ E(d^2) &= \frac{N}{N-1}\cdot\frac{N}{m\cdot n}\left(\frac{S_2}{N} - \frac{S_1^2}{N^2}\right)\\ E(d^3) &= \frac{N}{N-1}\cdot\frac{N}{N-2}\cdot\frac{(n-m)\cdot N}{m^2\cdot n^2}\left(\frac{S_3}{N} - 3\frac{S_1}{N}\cdot\frac{S_2}{N} + 2\frac{S_1^3}{N^3}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Bezeichnen wir das zweite und dritte Moment der z-Reihe um $M_z = \frac{1}{N}(z_1 + z_2 + \cdots + z_N)$ mit $\mu_2(z)$ und $\mu_3(z)$, so ist

$$\left.\begin{aligned} E(d) &= 0\\ E(d^2) &= \frac{N}{N-1}\cdot\frac{N}{m\cdot n}\,\mu_2(z)\\ E(d^3) &= \frac{N}{N-1}\cdot\frac{N}{N-2}\cdot\frac{(n-m)\cdot N}{m^2\cdot n^2}\,\mu_3(z)\\ \varrho(d) &= \frac{n-m}{\sqrt{m\,n}}\cdot\frac{\sqrt{N-1}}{N-2}\,\varrho(z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (12a).$$

Bemerkenswert ist vor allem, daß die Schiefe $\varrho(d)$, die für $n = m$ und für $\varrho(z) = 0$ verschwindet, selbst bei großem $\varrho(z)$ praktisch vernachlässigt werden kann, da beide Faktoren von $\varrho(z)$ stark verkleinern. Die Verteilung von d ist also nahezu symmetrisch, so daß der Ansatz

$$d \pm k\,\sigma(d) = d \pm k\sqrt{\frac{N}{N-1}\cdot\frac{N}{m\,n}\,\mu_2(z)}$$

erlaubt ist.

Um den Anschluß an die übliche Bezeichnung zu erhalten, schreibe ich das zweite Moment in der Form:

$$E(d^2) = \sigma^2(d) = \frac{N}{N-1}\cdot\frac{m\,s_x^2 + n\,s_y^2}{m\,n} + \frac{d^2}{N-1} \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

wobei $s_x^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - M_x)^2$ und $s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - M_y)^2$ ist. Dieses Ergebnis weicht von der bisher üblichen Formel

$$\sigma^2(d) = \frac{N}{N-2}\cdot\frac{m\,s_x^2 + n\,s_y^2}{m\,n} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

entschieden ab. Unwichtig ist zwar der Unterschied um eine Einheit im ersten Nenner, bedeutsam aber mein Zusatzglied $+ d^2 : (N-1)$. Vor allem beim Vergleich kurzer Reihen macht sich sein Einfluß stark bemerkbar.

Im Sonderfall der Doppelalternative sei in der ersten Reihe von m Gliedern das Merkmal a_{m_1} mal vorhanden, a_{m_2} mal nicht vorhanden, in der zweiten n-gliedrigen Reihe werde es a_{n_1} mal beobachtet, a_{n_2} mal nicht beobachtet. Wir haben also die 2×2 Tafel

a_{m_1}	a_{m_2}	m
a_{n_1}	a_{n_2}	n
A_1	A_2	N.

Für x und y setzen wir bei positiver Beobachtung genau wie früher den Wert $+1$, bei negativer Beobachtung den Wert 0 an. Dann ist:

$$M_x = \frac{a_{m_1}}{m}, \qquad M_y = \frac{a_{n_1}}{n}, \qquad d = M_x - M_y = \frac{a_{m_1}}{m} - \frac{a_{n_1}}{n},$$

$$s_x^2 = \frac{a_{m_1}}{m}\left(1 - \frac{a_{m_1}}{m}\right), \qquad s_y^2 = \frac{a_{n_1}}{n}\left(1 - \frac{a_{n_1}}{n}\right).$$

Die Formel (13) liefert dann:

$$\sigma^2(d) = \frac{1}{m\,n\,(N-1)}(N\,m\,s_x^2 + N\,n\,s_y^2 + m\,n\,d^2)$$

$$= \frac{1}{m\,n\,(N-1)}\left[N(a_{m_1} + a_{n_1}) - \frac{1}{m\,n}(N\,n\,a_{m_1}^2 + N\,m\,a_{n_1}^2 - n^2 a_{m_1}^2 - m^2 a_{n_1}^2 + 2\,m\,n\,a_{m_1}\,a_{n_1})\right]$$

$$= \frac{1}{m\,n\,(N-1)}(N\,A_1 - A_1^2)$$

$$= \frac{1}{N-1} \cdot \frac{A_1\,A_2}{m\,n}.$$

Bis auf die Bezeichnung (ich habe sonst $m = a_1$, $n = a_2$ geschrieben) ist das die von mir zum ersten Male [4c] klar herausgearbeitete strenge Formel für die Streuung der Differenz zweier beobachteter Häufigkeiten, die in etwas anderer Weise von mir bereits früher [4a] abgeleitet worden ist. Wenn der Ansatz von R. A. Fisher überhaupt einer Rechtfertigung bedarf — dieser Ansicht ist E. S. Pearson [2] —, so wird diese dadurch geleistet, daß die allgemeine Formel für den Spezialfall der Doppelalternative zu dem richtigen Ausdruck führt, was bei der im Schrifttum üblichen Gl. (14) nicht der Fall ist. Die Angriffe E. S. Pearson's gegen die kombinatorische Methode halte ich für unberechtigt. Das Verfahren zeigt sich bei vielen Aufgaben sehr wirksam. Ein schönes Beispiel liefert die Berechnung der Streuung der Lexisschen Zahl durch Fr. A. Willers [5].

Nachtrag bei der Korrektur:

Inzwischen habe ich erfahren, daß E. I. G. Pitman in einer sehr lesenswerten Arbeit «Significance tests which may be applied to samples from any populations» (Suppl. I. R. statist. Soc., London, Bd. 4 (1937), S. 119 bis 130) sich ebenfalls in positivem Sinne mit dem Ansatz von R. A. Fisher beschäftigt hat, welcher die Beurteilung der Differenz der arithmetischen Mittel zweier stetigen statistischen Größen zum Ziel hat. Zu meiner einfachen Formel (13) gelangt er aber nicht. Dagegen geht aus seiner Arbeit hervor, daß O. N. Anderson in seinem Buch «Einführung in die mathematische Statistik» (Berlin 1935, insbesondere S. 219) bereits Ausdrücke entwickelt hat, die den Formeln (7) dieser Arbeit gleichwertig sind. 211

Schrifttum.

[1] R. A. Fisher: J. R. anthrop. Inst. Bd. 64 (1936), S. 57; zitiert nach

[2] E. S. Pearson: Some aspects of the problem of randomization. Biometrika, Cambridge, Bd. 29 (1937), S. 53 bis 64.

[3] R. Prigge: Fehlerrechnung bei biologischen Messungen. Naturwiss. Bd. 25 (1937), S. 169 bis 170.

[4a] H. von Schelling: Die Beurteilung der Treffsicherheit von Prognosen. Deutsch. Statist. Zentralbl. Bd. 27 (1935), S. 141 bis 148.

[4b] H. von Schelling: Die mathematisch-statistische Bewertung von Stichproben und deren Bedeutung für die Beurteilung von Tierversuchen. Zweite Mitteilung. Die Abgrenzung von Mutungsbereichen. Arb. a. d. Staatsinst. f. experim. Therapie z. Frankfurt a. M. Heft 37 (1939), S. 28 bis 54.

[4c] H. von Schelling: Über die exakte Behandlung des Zusammenhanges zwischen biologischen Merkmalsreihen. Arb. a. d. Staatsinst. f. experim. Therapie z. Frankfurt a. M. Heft 39 (1940), S. 35 bis 71.

[4d] H. von Schelling: Fehlerrechnung bei biologischen Messungen. Naturwiss. Bd. 28 (1940), S. 430 bis 431.

[5] Fr. A. Willers: Prüfung der Einheitlichkeit eines Massenfabrikates. Z. angew. Math. Mech. Bd. 14 (1934), S. 77 bis 84.

BUCHBESPRECHUNGEN

First Report on Viscosity and Plasticity (prepared by the Committee for the Study of Viscosity of the Academy of Sciences at Amsterdam). 1. Abschnitt. Teil XV, No. 3, 2. Aufl. VIII + 273 S. Amsterdam 1939, N. V. Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij. Preis geb. 12,— f.

Dieser „erste Bericht" enthält eine Reihe von Darstellungen der wesentlichen Probleme auf dem Gebiet der Viskosität und Plastizität und ihrer Bedeutung. Es beginnt mit einem Kapitel von J. M. Burgers (Delft), in welchem nach den üblichen Definitionen und einführenden Erläuterungen allgemeine Betrachtungen über den Mechanismus der inneren Reibung zusammengestellt werden. Neben dem Maxwellschen Relaxationsansatz wird die Vorstellung der Aufteilung eines Stoffes in elastische und flüssige Glieder mit Zähigkeit und Fließgrenze erörtert, wobei die Behandlung von Modellen auch mit komplizierten Parallel- und Reihenschaltungen einen großen Raum einnimmt. Ausführlich wird auch das Prandtlsche Modell des plastischen Verhaltens erörtert. Es folgen Betrachtungen über die Strukturelemente und die Viskosität der Flüssigkeiten. Das Kapitel schließt mit der Theorie von Andrade über die Berechnung der Zähigkeit am Schmelzpunkt.

Das zweite Kapitel widmet derselbe Verfasser der experimentellen Untersuchung der Fließerscheinungen. Bemerkenswert ist der Oberbegriff „fluid" für einen Stoff, der bei kleinsten Spannungen (also ohne Fließgrenze) fließt. Zu ihnen gehören einerseits die „liquids", für welche ein festes Fließgesetz [Fließgeschwindigkeit $D = \frac{d\gamma}{dt}$ eine Funktion der Schubspannung τ, also $D = f(\tau)$] gilt, insbesondere also die Newtonschen Flüssigkeiten mit dem Gesetz $\tau = \eta \cdot D$; andererseits aber Stoffe, deren Verhalten nur durch eine zeitlich veränderliche Funktion dieser Größen darstellbar ist, die also z. B. Thixotropie oder Selbstwiederherstellung (self-restoring) oder sonstwie ein Gedächtnis zeigen. Neben dem „fluid" gibt es das elastische Verhalten $[\tau = F(\gamma)]$ und das plastische, bei dem zum Eintritt des Fließens erst eine Fließgrenze überschritten werden muß. Mit der Erörterung der Verwendbarkeit der verschiedenen Meßverfahren für die Zähigkeit (Kapillaren, Couette, Ausfluß, Plastometer) werden als Beispiele Messungen an Chatterton-Compound und an Gummi besprochen, wobei auch die allgemeineren Tensorbeziehungen kurz angedeutet werden.

H. G. Bungenberg de Jong (Leiden) berichtet über Viskositätsmessung besonders für die Kolloidchemie. Mit Bezug auf die Notwendigkeit, zur Prüfung der Einsteinschen und Smoluchowskischen Formeln über die Abhängigkeit der Zähigkeit von der Konzentration die „relative Viskosität" recht genau zu messen, behandelt er zunächst die systematischen Fehler der Kapillarviskosimeter besonders in Abhängigkeit von den Kapillarenabmessungen und dem Meßbereich, sowie die Bestimmungsmethoden. An hydrophilen Solen werden sodann zwei Typen unterschieden: lyophobe Solen, deren Viskosität sich nur wenig von der des Dispersionsmittels unterscheidet, und lyophile Solen, die auch bei kleinen Konzentrationen beträchtlich höhere Viskosität aufweisen. Die Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes als Ausdruck des Newtonschen Charakters der Flüssigkeit kann mittels Ostwaldschen Viskosimeters geprüft werden. Bei Nichtgültigkeit besitzt das weniger genaue Couette-Viskosimeter Vorzüge. Für die Stoffe ergibt sich die Dreiteilung: a) Poiseuille gilt. b) Poiseuille gilt nicht, Hysteresis besteht nicht: c) Poiseuille gilt nicht und Hysteresis besteht. Für die hydrophilen Solen der ersten Gruppe, die dem Poiseuilleschen Gesetz folgen, ergibt die viskosimetrische Analyse Abweichungen von der Einsteinschen Formel, für die drei Ursachen als möglich erwähnt werden: nichtkugelige Form der dispersen Teile, Schwellung der Teile (Solvation) und Porosität (Vollsaugen) der Teile. Die Bedeutung der Viskositätsmessungen für die Solvationsforschung und für die Erforschung der elektrischen Ladungen der dispersen Teile wird an typischen Beispielen erörtert.

Es folgt ein Kapitel über Viskosität und Plastizität vom technischen Gesichtspunkt von C. J. van Nieuwenburg (Delft), der auf die Unzulänglichkeit der einen Kenngröße η (Zähigkeitswert im Newtonschen Gesetz) bei nicht newtonischen Flüssigkeiten hinweist und die Wiedergabe des ganzen Zähigkeitsgesetzes $D(\tau)$ befürwortet, wie dies analog z. B. auf dem Gebiet der Werkstoffkunde längst geschieht. Entsprechend findet eine Gruppierung der Stoffe nach dem Verlauf des Gesetzes Anwendung, d. h. danach, ob $\eta = \frac{dD}{d\tau}$ konstant ist oder mit wachsendem τ wächst oder fällt und ob eine Fließgrenze vorhanden ist (plastisch) oder nicht (flüssig). Die vielfältigen technischen Meßverfahren finden insbesondere bei Besprechungen der Petroleumderivate Erwähnung, getrennt nach solchen für niedrige konstante Zähigkeit und solchen für hohe und veränderliche Zähigkeit bis zur Penetrationsmessung und Messung durch Scherbiegebeanspruchung von Stäben. Mit den Eigenschaften von Gummi finden nochmals Plastometermessungen Erörterung. Weiter werden für Kunstharz, Farbtünche, Ton, Glas und andere Stoffe typische Besonderheiten hervorgehoben. Einige allgemeine Betrachtungen über eine mögliche Superposition von Zähigkeit und Plastizität sowie Bemerkungen zur Nomenklatur schließen das Kapitel.

Die Plastizität kristalliner Substanzen, insbesondere der Metalle, behandeln W. G. Burgers (Eindhoven) und J. M. Burgers (Delft). Im ersten Teil dieses Kapitels findet man die übliche Behandlung der Zerreißkurven von kristallinen Gefügen und Bemerkungen über Reibungswirkungen als Ursache des Fließwiderstandes, worunter einerseits die Zähigkeit (= Viskosität!) im elastischen und im plastischen Gebiet, andererseits die Fließgrenze verstanden werden kann. Die grundlegenden Fließgesetze von Andrade und Prandtl-Deutler werden wiedergegeben, der Hystereseverlust bei schwingender Beanspruchung erörtert. Der zweite Teil ist der plastischen Verformung des Einzelkristalls gewidmet. Ausgehend von den bekannten ersten Ergebnissen über Gleitflächen und Gleitrichtung werden die Verfestigung der kritischen Schubspannung und ihre Abhängigkeit von der Temperatur bei Metallen beschrieben und die merkwürdigen Erscheinungen an Steinsalz in Zusammenhang mit der Smekalschen Lockerstellenvorstellung dargestellt. Von besonderem Interesse ist die dann folgende Zusammenstellung der Vorstellungen über die Möglichkeit plastischer Vorgänge im Kristallgitter, wobei sich als Grundgedanken herausschälen die Theorie der ortsfesten Lockerstellen (Smekal), die Theorie der wandernden Versetzungen (Taylor), die eine Verfestigung liefert, die Theorie der thermodynamischen Atomsprünge (R. Becker), eine Vereinigung der Becker-Smekalschen Gedanken (Orowan), die Zeiteffekte (Zähigkeit) liefert, und schließlich Anregungen zur Vereinigung der Taylorschen

und Orowanschen Theorie, die Verfestigung und Zähigkeit zugleich liefert (Burgers).

Im letzten Kapitel werden Viskositätseffekte in lebendem Protoplasma und in Muskeln von H. J. Jordan (Utrecht) erörtert. Nach einführenden Bemerkungen über die diesbezügliche Fragestellung für lebende Stoffe und über die Viskosität und Elastizität von Protoplasma bilden vor allem die glatten Muskeln niederer Organe und gewisser wirbelloser Tiere, die solchen Organen gleich zu werten sind, den Gegenstand der Ausführungen. Die Wiedergabe experimenteller Untersuchungen über das Verhalten unter Last zeigt den typischen Unterschied zwischen elastischen und plastischen Muskeln. Als allgemeine Merkmale der Plastizität beim Streckvorgange werden der Einfluß der Temperatur und der Hydration auf die Dehnungs-Zeit-Kurve, die Streckgrenze und die visko-elastische Erholung dargestellt und an einem mechanischen Modell erläutert und mathematisch durchgeführt. Von den Änderungen des viskosen Widerstandes während der Dehnung wird besonders eine Zunahme („Schneepflugeffekt") besprochen, die als abhängig von der Geschwindigkeit nicht unmittelbar der Verfestigung bei Metallen gleichzusetzen ist. Der Bedeutung des tonischen Spannungszustandes wird durch weitere Ausführungen Rechnung getragen. Die Anwendung auf die transversalgestreiften Muskeln der Wirbeltiere wird an Hand eines elasto-viskosen Modells angedeutet.

Im ganzen stellt dieser „erste Bericht" einen wertvollen kritischen Überblick über den heutigen Stand unserer Kenntnisse und der Forschung auf allen mit Fragen der Viskosität und Plastizität zusammenhängenden Gebieten dar, der überall an die wichtigen Grundfragen heranführt und auf die einschlägige Literatur hinweist. Wenn dabei naturgemäß auch einige offensichtlich schwache Methoden ohne Beanstandung wiedergegeben wurden, so ist doch beherrschend eine gute kritische Behandlung festzustellen, die durch ihre wegweisende Ergänzung einen erfreulichen Fortschritt darstellt.

Danzig-Langfuhr. H. Fromm. 247

Dr. phil. **WILHELM SPÄTH,** Physik und Technik der Härte und Weiche. VIII + 250 S. m. 214 Textabb. Berlin 1940, Verlag Julius Springer. Preis geb. 19,50 M.

Das Ziel des Buches ist es, als neuen Begriff in die Werkstofflehre das Verhältnis einer Spannung zu einer bleibenden Formänderung einzuführen. Beim Zugversuch erscheint so neben dem Elastizitätsmodul ein „Plastizitätsmodul" als Verhältnis von Zugspannung zu bleibender Dehnung, bei der Härteprüfung eine neue „Härte" als das Verhältnis einer mittleren Eindruckspannung zu einer mittleren Eindrucktiefe. Der Kehrwert der „Härte" heißt „Weiche".

Diese Neuerung erscheint wenig glücklich, da sie nicht nur die Prüfung umständlicher macht, sondern auch begrifflich keinen Vorteil bietet und sachlich keine typische Kenngröße liefert. Besonders aber würde die Bezeichnung „Härte" für diesen neuen Begriff abzulehnen sein, da der Grundbegriff der Härte doch sehr viel sauberer festliegt, als dies der Verfasser darstellt, wenn auch ihre meßtechnische Erfassung noch nicht vollkommen geglückt ist. Leider verwechselt der Verfasser wiederholt Grenzwerte mit laufenden Werten oder den Funktionswert mit der Ableitung, wie z. B. Verfestigung mit Abnahme der Verfestigungsfähigkeit und ist auch sonst in seinen vorangestellten „Grundbegriffen" so verwirrend, daß es schon einer Sicherheit des Lesers bedarf, wenn er keinen Schaden nehmen soll.

Im übrigen findet man eine Zusammenstellung und Beschreibung der üblichen Härteprüfverfahren mit einer wertvollen Übersicht über den Zusammenhang der verschiedenen Härtewerte (bisher üblicher Art) untereinander und mit anderen Werkstoffeigenschaften, ohne dabei auf grundsätzlich Neues zu stoßen. Die Bedeutung der Kalthärtung wird kurz gestreift. Sonderprüfungen an unvulkanisiertem Kautschuk (Plastometer), vulkanisiertem Kautschuk (Rückprallversuch), Kunststoffen und Holz sind kurz behandelt.

Danzig-Langfuhr. H. Fromm. 246

Prof. Dr. F. **RAUSENBERGER,** Theorie der Rohrrücklaufgeschütze. 2. Aufl. bearb. v. Prof. Dr. O. von Eberhard. IX + 175 S. m. 64 Abb. Berlin 1939, Verlag Julius Springer. Preis geb. 16,20 M.

Das vielen Artilleristen und fast allen Geschützkonstrukteuren bekannte Buch ist aus den Vorlesungen des 1926 verstorbenen Lehrers der Waffenkonstruktionskunde an der ehemaligen militärtechnischen Akademie zu Charlottenburg, und späteren waffentechnischen und artilleristischen Vorstandsmitgliedes der Krupp A.G. hervorgegangen. Die vorliegende 2. Auflage rührt von dem jüngst verstorbenen Chefballistiker bei Krupp, dem ältesten Schüler von C. Cranz, Prof. O. v. Eberhard, her. Er hat das Werk entsprechend den Fortschritten der Geschütztechnik erweitert und vergrößert, wobei er auch einige Fachgenossen zur Mitarbeit in besonderen Fachgebieten hinzugezogen hat. Das gilt insbesondere für die Bestimmung der Bremskräfte und Bremswiderstände und der Erwärmung der Rohrbremsen, Untersuchungen, an denen Dipl.-Ing. Georg Hayn mitgearbeitet hat. Ein ausführlicher und völlig neu bearbeiteter Abschnitt bezieht sich auf die Vorholmittel, insbesondere die Berechnung der Vorholfedern, von O. v. Eberhard selbst herrührend. Um die zur Erzielung eines langen Rücklaufes bei großer Rohrerhöhung erforderliche Rückverlegung der Schildzapfen des Rohres wieder auszugleichen, sind besondere Feder- oder Luftausgleicher anzubringen, mit denen sich Dipl.-Ing. F. Böminghaus und F. Kemnitz beschäftigen. Der eigentlichen Geschützttheorie sind drei Anhänge angefügt, von denen der erste innerballistischen Inhalts ist und sich mit der Nachwirkung des Gasdruckes der Pulvergase beschäftigt. Die dadurch bedingten Änderungen der Geschoßgeschwindigkeit und der Gasgeschwindigkeit an der Rohrmündung werden nach Formeln bestimmt, die von Dipl.-Ing. H. Kratz zusammengestellt worden sind. Im zweiten Anhang werden kurz Geschütze mit Doppelbremse betrachtet. Zuletzt kommen noch ein paar Bemerkungen über den Hochsprung eines Rohrrücklaufgeschützes hinzu, insbesondere über den Einfluß der Bremskraft auf die Größe des Hochsprunges.

So ist das alte klassische Werk wieder auf die gegenwärtige Höhe der Geschütztechnik gebracht worden und wird seinen Zweck erfüllen, dem jungen Ingenieur und dem für technische Fragen interessierten Artillerieoffizier eine Hilfe dabei zu bieten, wenn er sich über das Gebiet des Geschützbaues unterrichten will.

Berlin. R. Rothe. 243

C. **CRANZ** und O. von **EBERHARD,** Die neuzeitliche Entwicklung der Schußwaffen. 2. erweiterte Aufl. 72 S. m. 23 Bildern. Berlin 1939, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 2 M.

Wer die theoretische Ballistik nicht nur vom mathematischen Standpunkte aus, sondern auch im Hinblick auf die Technik der Gewehre und Geschütze studieren will, ohne sich dabei in fernliegende konstruktive Einzelheiten verlieren zu müssen, dem sei dieses Heft aus der Feder zweier Fachleute ersten Ranges auf das angelegentlichste

empfohlen. Es ist sehr zu beklagen, daß Herr von Eberhard, einer der ältesten und besten Schüler des Altmeisters Cranz, der Chefballistiker von Krupp, vor einigen Wochen seine Kameraden und Fachgenossen im Tode hat verlassen müssen. Das ausgezeichnete kleine Werk wird jedem, der sich über die Technik der Feuerwaffen in geschichtlicher und physikalischer Hinsicht kurz unterrichten will, ein ebenso interessant geschriebener wie anregender und zuverlässiger Berater sein. Die vorliegende zweite Auflage führt die Waffentechnik bis zu den neuesten Errungenschaften, soweit diese überhaupt einem öffentlichen, nicht militärischen Leserkreise ohne Gefährdung der notwendigen Geheimhaltung mitgeteilt werden dürfen. Zu den zwei schon vorhanden gewesenen Teilen über die Entwicklung der Handfeuerwaffen und über die Entwicklung der Artillerie ist ein dritter hinzugekommen (Schlußbemerkungen allgemeiner Art), der zunächst über die Entwicklung der Theorie des Schießens in den letzten 25 Jahren in treffender exakter Weise die wesentlichen Fortschritte der äußeren Ballistik berichtet und sodann den theoretischen Wirkungsgrad einer Schußwaffe ins Auge faßt. Während früher das Treffen bei der Artillerie im wesentlichen auf ein Einschießen abgestellt war, die Schußweiten also a priori nur ungefähr bekannt zu sein brauchten, ist heute die Möglichkeit des Einschießens nur noch in seltenen Fällen gegeben. Vielmehr soll jetzt gleich die erste Salve genau in einem bestimmten Planquadrat liegen. Infolgedessen sind heute ganz andere Anforderungen an die Ballistik zu stellen, als es vor dem Weltkriege nötig war. Mittlere Schußweiten von 10 km kann man heute auf rund 15 m genau, und Schußzeiten von 50 sec auf etwa 0,04 sec. genau bestimmen. Wenn wir heute in einem Heeresbericht lesen, daß unsere Ferngeschütze von der flandrischen Küste aus ein feindliches Schiff aus einem Geleitzug herausgeschossen haben, so ist ein Gutteil solcher Präzision sowohl den exakten Methoden der heutigen Ballistik wie auch der technischen Höhe unserer Schußwaffen zuzuschreiben.

Berlin. R. Rothe. 244

Dr. KARL **GEY,** Oberstudiendirektor in Leipzig, Dr. habil. HORST **TEICHMANN,** Dozent für Physik a. d. Techn. Hochschule, Dresden. Einführung in die Lehre vom Schuß (Ballistik). (Math.-Phys. Bibl., Reihe II, Abrisse aus dem Gebiete der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften.) III. verbesserte und erweiterte Aufl. 128 S. m. 69 Fig. u. 2 Tafeln. Leipzig und Berlin 1939, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 3,60 M.

Die neue Auflage des bekannten verdienstvollen Büchleins enthält einige Erweiterungen auf folgenden Gebieten: Innere Ballistik, Schießen nach beweglichen Zielen, Einfluß der Erddrehung auf die Bestimmung der Flugbahn, Erweiterungen, die manchem Leser willkommen sein werden. Es darf jedoch nicht verhehlt werden, daß eine Bescheidung des Zieles an manchen Stellen des Buches, das doch immer einen schulmäßig elementaren Charakter behalten wird, am Platze gewesen wäre. Dies trifft u. a. zu für die Bemerkungen, die sich über die Integration des gekoppelten Systems der beiden außerballistischen Hauptgleichungen auf S. 54 an diese anschließen. Hier hätte es genügt zu sagen, daß man heute sowohl rechnerische wie zeichnerische Verfahren kennt, die Differentialgleichungen des außerballistischen Hauptproblems mit beliebiger Genauigkeit zu integrieren, wobei das Luftwiderstandsgesetz beliebig durch Beobachtung gewonnen sein kann und sogar die Abhängigkeit der Luftdichte und der Schwerkraft von der Höhe berücksichtigt werden kann. Die Beweise auf Seite 58 über die Existenz einer lotrechten Symptote und einer Grenzgeschwindigkeit bei jeder Schußbahn sind nicht fehlerfrei und sollten aus diesem Buche lieber ganz wegbleiben. Für ernsthafte Untersuchungen über theoretische Ballistik reichen die Grundlagen dieses Büchleins nicht aus. Dagegen ist es für den Standpunkt der höheren Schule, insbesondere auch für wehrtechnische Arbeitsgemeinschaften durchaus zu empfehlen.

Berlin. R. Rothe. 245

Dr. FR. **REGER,** Tachymetertafeln für neue (zentesimale) Teilung. VII + 490 S. Stuttgart 1940, I. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung. Preis geb. 19,40 M.

Bei der tachymetrischen Punktbestimmung mit Hilfe des Fadenentfernungsmessers für topographische Zwecke erhält man die horizontale Entfernung E und den Höhenunterschied h — die Bezeichnungen werden in Anlehnung an den Verfasser gewählt — auf Grund der beiden Näherungsgleichungen

$$E = D\cos^2\alpha \quad \text{und} \quad h = D\frac{1}{2}\sin 2\alpha .$$

Dabei ist α der Vertikalwinkel und D eine Rechnungshilfsgröße, die man erhält aus $D = c + kl$, wobei c die Additionskonstante und k die Multiplikationskonstante des Instruments und l der Lattenabschnitt ist.

Für die Berechnung insbesondere von h auf Grund der obigen Gleichung gibt es verschiedene Hilfsmittel in Form von numerischen Tafeln, graphischen Tafeln und mechanischen Vorrichtungen.

Bei der Herstellung einer numerischen Tafel für den Höhenunterschied h als Funktion von D und α bestehen zwei Möglichkeiten. In dem einen Fall wählt man — wie dies der Verfasser im Anschluß an die Tachymetertafeln für alte Teilung von W. Jordan getan hat — die Rechnungshilfsgröße D als Haupteingang in die Tafel. Im zweiten Fall wählt man den Vertikalwinkel α als Haupteingang. Diese zweite Art der Anordnung verdient in bezug auf die Bequemlichkeit beim Einschalten zwischen Tafelwerten den Vorzug.

Die Herstellung dieser neuen Tafel ist dadurch erforderlich geworden, daß nach einem Runderlaß des Reichs- und Preußischen Ministers des Innern bis zum 1. 4. 1945 die neue Teilung oder Zentesimalteilung in Deutschland eingeführt wird.

Stuttgart. P. Werkmeister. 223

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. G. **JOOS,** Prof. an d. Univ. Göttingen, und Dr. TH. **KALUZA,** Prof. an d. Univ. Göttingen, Höhere Mathematik für den Praktiker, an Stelle einer 6. Aufl. des Lehrbuchs der Differential- und Integralrechnung von H. A. Lorentz. 2. verb. Aufl. XII + 368 S. m. 85 Abb. Leipzig 1940, Verlag Johann Ambrosius Barth. Preis geb. 24,50 M.

Vorspannung im Eisenbetonbau, Grundlagen, Ziel, Zweck und Anwendung. Beiträge von Prof. Dr.-Ing. L. **PISTOR,** Dipl.-Ing. R. **OPPERMANN,** Dr.-Ing. W. **PASSER,** Oberbaurat Dr.-Ing. e. h. Dr. F. **v. EMPERGER,** mit einem Geleitwort von Prof. Dr.-Ing. A. **KLEINLOGEL.** 80 S. m. 68 Textabb. Berlin 1940, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 3,80 M.

Prof. Dr. HUGO **DINGLER,** Max Planck und die Begründung der sogenannten modernen theoretischen Physik. 32 S. Berlin 1939, Ahnenerbe-Stiftung-Verlag. Preis 0,80 M.

Handbuch der Werkstoffprüfung. Herausgegeben unter besonderer Mitwirkung der Staatl. Materialprüfungsanstalten Deutschlands, der zuständigen Forschungsanstalten der Hochschulen, der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft und der Industrie sowie der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt Zürich. I. Bd.: **Prüf- und Meßeinrichtungen,** bearb. von R. Berthold, Berlin, A. Eichinger, Zürich-Düsseldorf, W. Ermlich, Berlin, G. Fiek, Berlin, L. Föppl, München, R. Glocker, Stuttgart, E. Lehr, Augsburg, E. Siebel, Stuttgart, O. Vaupel, Berlin, herausgeg. von Prof. Dr.-Ing. E. Siebel, Techn. Hochschule Stuttgart. XIV + 658 S. m. 763 Abb. Berlin 1940, Verlag Julius Springer. Preis geb. 69 M.

Kalender der Technik 1941. Berlin 1940, VDI-Verlag, G. m. b. H. Preis 2,50 M.

Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs, Teil II, Veröffentlichung der Vorträge, die anläßlich des 25jährigen Bestehens der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt am 14. Juni 1939 gehalten wurden, herausgegeben von Dr.-Ing. G. Kempf. 236 S. m. 102 Abb. München 1940, Verlag R. Oldenbourg. Preis geb. 12,50 M.

NACHRICHTEN

Max Lagally zum 60. Geburtstag.

Am 7. Januar 1941 hat Professor Max Lagally an der Technischen Hochschule in Dresden sein 60. Lebensjahr vollendet. Das legt uns nahe, des wissenschaftlichen Werkes dieses vielseitigen Mathematikers zu gedenken, der dem Fachgebiet dieser Zeitschrift so nahe steht wie wenig andere seiner Zunft. Der Familie eines Studienprofessors der Mathematik mit weitem Gesichtskreis entsprossen, am humanistischen Gymnasium ausgebildet und über dessen Bannkreis hinaus früh angeregt, widmete er sich an der Münchener Universität dem Studium für das Lehramt der Mathematik und Physik. Es war die von G. Darboux und S. Lie ausgehende Richtung in der Mathematik, die ihn unter dem Einfluß von F. Lindemann und A. Voß besonders anzog. Seine Doktorarbeit über Flächen mit sphärischen Krümmungslinien und eine Reihe von weiteren Veröffentlichungen aus diesen Gebieten zeugen davon. Die Annahme einer Assistentenstelle an der Technischen Hochschule in München erweiterte sichtlich sein geistiges Arbeitsgebiet. Da kam Lagally mit der Mechanik, mit der Vektorrechnung mit Hydrodynamik, Flächenkrümmung und Photogrammetrie in greifbare Berührung. Seine vorangegangene gründliche mathematische Ausbildung befähigte ihn bald, diesen Gebieten neue Gesichtspunkte abzugewinnen, zu schwierigen Aufgaben Stellung zu nehmen und ihre Lösung anzubahnen. Es folgte die Habilitation an der Technischen Hochschule, deren Wirkung alsbald durch den Weltkrieg unterbrochen wurde, an dem Lagally als Photogrammeter teilnahm. Seine Habilitationsschrift über unendlich kleine isometrische Verbiegungen einer Fläche mit höherer als erster Näherung birgt noch mancherlei fruchtbare Gedanken über das eigentliche Thema hinaus, die bei einer praktischen Verwertung der behandelten Aufgabe zur Geltung kommen könnten. Inzwischen war Lagally in das Lehramt an höheren Schulen eingetreten, was jedoch seine Fruchtbarkeit auf mathematischem Gebiete kaum beeinträchtigte. Besondere Hervorhebung verdient eine neue Seite der Betätigung Lagallys, die äußerlich mit seiner Assistentenzeit zusammenhing, innerlich aber durch persönliche Liebhaberei wohlvorbereitet war. Lagally hatte sich aus dieser heraus von Haus aus begünstigt, beträchtliche Kenntnisse im Reiche der beschreibenden Naturwissenschaften verschafft, und da war es nur natürlich, daß er mit Freuden die Gelegenheit ergriff, sie bei den Gletscherunternehmungen des Alpenvereins zu verwerten, wobei ihm außerdem seine erhebliche Bergsteigerfähigkeit nützte. Wie immer begnügte er sich auch hier nicht mit einer beiläufigen Anteilnahme; er führte z. B. ganz selbständig die photogrammetrische Konstruktion der Karte des Suldenferners nach dem damals noch üblichen mühseligen Verfahren durch. Als ihn dann 1920 ein Ruf als ordentlicher Professor an die Technische Hochschule in Dresden in ein weites Arbeitsfeld versetzte, fand er trotz der vielen neu aufgetretenen Verpflichtungen die Zeit zur Entfaltung eines reichen wissenschaftlichen Schaffens, in dem die in seiner Lehrzeit in München gelegten Keime zu selbständiger Blüte und Reife gediehen. Ihre Frucht zeigt sich vornehmlich in drei Hauptwerken, die Lagallys unermüdliche Arbeit krönen. Es sind dies der zusammenfassende Bericht über die „Idealen Flüssigkeiten" im Handbuch der Physik von H. Geiger und K. Scheel, sein Lehrbuch der Vektoranalysis und die „Mechanik und Thermodynamik des stationären Gletschers". Allen ist neben tiefer Beherrschung des Stoffes, Strenge des Ausdruckes und bohrendes Eindringen in die letzten Folgerungen der Lehre eigentümlich. Sie sind nicht volkstümlich, aber dankbar für ernstes Studium. Die Arbeiten Lagallys über Gletscher haben seinen Namen in weite Kreise der Geographie und Geophysik getragen und die diesbezügliche Forschung maßgebend beeinflußt. Nichts wäre jedoch falscher, als wenn man angesichts dieses erfreulichen Erfolges Lagallys wissenschaftliche und lehrhafte Leistungen auf mathematischem Gebiete zurücktreten ließe. Ihr Reichtum und ihre Eigenart schützen sie vor solcher Schattenstellung. Überall hat Lagally Höchstes erstrebt und Bleibendes erreicht.

München. Seb. Finsterwalder. 248

Zum 60. Geburtstag von E. Salkowski.

Am 3. Februar 1941 vollendete Dr. Erich Salkowski, der Ordinarius für Geometrie an der Technischen Hochschule Berlin, sein 60. Lebensjahr. Sein Name ist nicht nur mit der geometrischen Forschung der letzten Jahrzehnte, sondern darüber hinaus mit allen Bestrebungen verbunden, die auf eine Betonung der anschaulich-geometrischen Denkweise, auf eine organische und gegenseitig befruchtende Verbindung zwischen Geometrie und Analysis abzielen. Der geometrische Unterricht in Schule und Hochschule hat die stärksten Anregungen durch die Arbeiten Salkowskis erfahren, und wenn sich die alte „Darstellende Geometrie" an unseren Hochschulen heute zu einer lebensnahen „Konstruktiven Geometrie" wandelt, bei der nicht mehr das „Darstellen" vorhandener mathematischer oder technischer Raumformen, sondern vielmehr ihre konstruktive Erfassung „in statu nascendi" im Vordergrund steht, so liegen die Wurzeln für diese Entwicklung bei den Gedankengängen Salkowskis. Der 60. Geburtstag wird und soll für den Jubilar kein Abschluß sein; mögen noch viele weitere Jahre rüstigen Schaffens folgen!

Danzig. U. Graf. 250

Ende Januar verstarb der ord. Prof. für Vermessungswesen und Photogrammetrie an der Techn. Hochschule Dresden Dr.-Ing. R. Hugershoff.

Am 3. Februar 1941 verstarb der ord. Prof. der Mathematik an der Techn. Hochschule Hannover Dr. G. Prange.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

R. Sauer, **Über Interpolation von Kurvenscharen mit Anwendung auf die Berechnung von Geschoßflugbahnen.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 280 bis 284.

Unter Anwendung von Affintransformationen gelangt Herr Sauer zu einem einfachen Verfahren, das eine bequeme Linearinterpolation zwischen den Kurven einer Schar von Parameterkurven gestattet. Die Anfangswerte der affin transformierten Kurven enthalten bis zu den Ableitungen 2. Ordnung den Parameter λ nicht, sie haben also im Anfangspunkt für jeden Parameter drei unendlich benachbarte Punkte gemeinsam. Im besonderen führen die Sauerschen Betrachtungen bei der Anwendung auf das außenballistische Problem auf Formeln, die ich näher behandelt habe (Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 361 bis 371).

Man kann nun die Genauigkeit bei der Interpolation in vielen Fällen noch erheblich steigern, indem man Transformationen einführt, welche die Parameterkurven einander so annähert, daß sie im Anfangspunkt eine beliebige Anzahl von unendlich benachbarten Punkten gemeinsam haben.

Gegeben sei eine Schar von Kurven

$$u = u(t, \lambda)\,;\; v = v(t, \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mit den Ableitungen

$$\dot{u} = \dot{u}(t, \lambda)\,;\; \dot{v} = \dot{v}(t, \lambda)\,;\; \ddot{u} = \ddot{u}(t, \lambda)\,;$$

$$\ddot{v} = \ddot{v}(t, \lambda)\,;\; \ldots . \overset{(n)}{u} = \overset{(n)}{u}(t, \lambda)\,;\; \overset{(n)}{v} = \overset{(n)}{v}(t, \lambda)\,.$$

Die Anfangswerte seien $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots . u_n, v_n$, die noch von λ abhängen. Wir verlangen nun, daß allen Parameterkurven im Anfangspunkt $(n+1)$ unendlich benachbarte Punkte gemeinsam seien. Dazu braucht dann die von Herrn Sauer abgeleitete Affintransformation nur auf das System

$$\left.\begin{array}{l} \overset{(n-2)}{u} = \overset{(n-2)}{u}(t, \lambda)\,;\; \overset{(n-1)}{u} = \overset{(n-1)}{u}(t, \lambda)\,;\; \overset{(n)}{u} = \overset{(n)}{u}(t, \lambda)\,; \\ \overset{(n-2)}{v} = \overset{(n-2)}{v}(t, \lambda)\,;\; \overset{(n-1)}{v} = \overset{(n-1)}{v}(t, \lambda)\,;\; \overset{(n)}{v} = \overset{(n)}{v}(t, \lambda) \end{array}\right\} \quad (2)$$

angewandt zu werden. Man gelangt so schließlich zu folgender Transformation:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \dfrac{m}{\cos\vartheta} \cdot \left[\displaystyle\sum_{\nu=2}^{\nu=n} u_{n-\nu} \cdot \frac{t^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\right] \\ \quad - n \cdot \cos\omega \cdot \left\{ \operatorname{tang}\vartheta \cdot \left[\displaystyle\sum_{\nu=2}^{\nu=n} u_{n-\nu} \cdot \frac{t^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\right] \right. \\ \quad \left. - \left[\displaystyle\sum_{\nu=2}^{\nu=n} v_{n-\nu} \cdot \frac{t^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\right] \right\}\,; \\ \eta = n \cdot \sin\omega \cdot \left\{ \operatorname{tang}\vartheta \cdot \left[\displaystyle\sum_{\nu=2}^{\nu=n} u_{n-\nu} \cdot \frac{t^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\right] \right. \\ \quad \left. - \left[\displaystyle\sum_{\nu=2}^{\nu=n} v_{n-\nu} \cdot \frac{t^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\right] \right\} \end{array}\right\} \quad (3).$$

Wendet man diese Formeln auf die außenballistischen Gleichungen an, so ergibt sich das Formelsystem (4). Dabei wurde vorausgesetzt, daß im Anfangspunkt eine vierpunktige Berührung unter den Parameterkurven stattfindet (Parameter $\lambda = \dfrac{1 + \sin\varphi}{2}$, φ = Erhöhung).

$$\left.\begin{array}{l} \xi = X \cdot \dfrac{1 + [n(v_0) - 1] \cdot \sin\varphi \cdot \sin\bar{\varphi}}{\cos\varphi} \\ \quad - Y \cdot [n(v_0) - 1] \cdot \sin\bar{\varphi}\,; \\ \eta = -[X \cdot \operatorname{tang}\varphi - Y] \cdot [n(v_0) - 1]\,; \\ \text{wo} \\ \sin\bar{\varphi} = \sin\varphi \cdot \left\{ 1 + \dfrac{\dfrac{A}{T_0} \cdot \left(\dfrac{1}{R\,A} - \dfrac{n(v_0)}{2}\right) \cdot v_0^2}{g \cdot [n(v_0) - 1]} \right\} \\ n(v_0) = v_0 \cdot \dfrac{f'(v_0)}{f(v_0)} \\ \quad (v_0 = \text{Anfangsgeschwindigkeit}\,; \\ \quad A = \text{Temperaturgradient})\,. \\ \text{Dabei ist:} \quad X = x - v_0 \cos\varphi \cdot t\,; \\ \quad Y = y - v_0 \cdot \sin\varphi \cdot t + \dfrac{g}{2} \cdot t^2\,. \\ \text{Ferner:} \quad \xi_0 = 0\,;\; \dot{\xi}_0 = 0\,;\; \ddot{\xi}_0 = -c \cdot f(v_0)\,; \\ \quad \dddot{\xi}_0 = c\,f(v_0) \cdot c\,f'(v_0) \\ \quad \eta_0 = 0\,;\; \dot{\eta}_0 = 0\,;\; \ddot{\eta}_0 = 0\,; \\ \quad \dddot{\eta}_0 = \dfrac{g}{v_0} \cdot c\,f(v_0) \cdot [n(v_0) - 1] \end{array}\right\} \quad (4).$$

Bei Verwendung anderer Gesetze für die atmosphärischen Bedingungen ändert sich nur $\sin\bar{\varphi}$ in diesen Formeln.

Es sei noch bemerkt, daß es im Falle der Ballistik nicht ratsam ist, noch höhere Berührungen zu verlangen, da die Anfangswerte der Ableitungen sehr bald unübersichtlich werden. An einigen numerischen Beispielen wurde festgestellt, daß der Interpolationsfehler durch diese neue Transformation gegenüber der von Herrn Sauer und mir zuerst beschriebenen um etwa die Hälfte sinkt.

Schließlich sei noch eine Bemerkung zum Schlußabsatz der Arbeit von Herrn Sauer gestattet. Dort wird auf eine Verallgemeinerung der Affintransformation hingewiesen, die bei ihrer Anwendung auf die Ballistik gestattet, aus einer Erdschußtafel die zugehörigen Flugbahnen (Luftschußtafel) abzuleiten. Ich habe auf diese Möglichkeit bereits im Schlußabsatz der schon zitierten Arbeit (Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 361 bis 371) hingewiesen und ihre Darstellung in einer gesonderten Abhandlung angekündigt. Obwohl diese aus bestimmten Gründen bisher nicht erscheinen konnte, habe ich das Prinzip eines solchen Verfahrens in seiner einfachsten Form bereits für die Ballistik des Bombenwurfes behandelt (Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940) Heft 7, S. 216).

Berlin. Dr. Hermann Athen. 242

Die Zuschrift des Herrn Dr. Athen hat Herrn Prof. Sauer vorgelegen. W.

H. Athen: **Interpolationsverfahren zur Berechnung von Flugbahnscharen und ihre Veränderung durch Variation der ballistischen Grundwerte.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 361 bis 371.

In dem Beitrag von H. Athen über ein Interpolationsverfahren zur Berechnung von Flugbahnscharen wird für den maximalen Fehler der zweigliedrigen Näherung die von der Flugzeit t unabhängige Abschätzung in Prozent gegeben:

$$\Delta w_{\max}(\%) = 100 \cdot \frac{2}{11} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 .$$

Die Formel ergab sich durch Vergleich der Entwicklung

$$w = w_0 + w_1 \lambda + w_2 \lambda^2 + \cdots$$

mit der harmonischen Reihe

$$w = w_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right),$$

woraus folgt:

$$w_1 = \frac{w_0}{2\lambda}, \quad w_2 = \frac{w_0}{3\lambda^2}, \quad w = \frac{11}{6} \cdot w_0 .$$

Tatsächlich ist aber Δw noch stark mit der Flugzeit t veränderlich, und zwar wächst Δw für größere t sehr schnell an. So betrug in einem Fall ($V_0 = 900$ m/s, $\varphi_1 = 25°$, $\varphi_2 = 45°$) das Fehlerprozent für die Schußweite X der Erhöhung $\varphi = 35°$ bei einer Flugzeit von $t = 65$ Sekunden das Fünffache des obigen Ausdruckes. Die Schußweite unterschied sich tatsächlich um 150 (m) von ihrem exakten Wert, wogegen jene Abschätzung einen Fehler von nur etwa 30 (m) erwarten ließ. Für größere Werte von φ und t verliert demnach obige Formel ihren Wert auch als rohe Abschätzung. Zur Abschätzung des Fehlers von interpolierten Schußweiten ist sie bei größeren Erhöhungen (d. unt. Winkelgruppe) mit Vorsicht zu verwenden.

Schließlich sei erwähnt, daß der Fehler der dreigliedrigen Näherung

$$w = w_0 + w_1 \lambda + w_2 \lambda^2$$

wegen der dann bestehenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \delta w_0 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdot w_3 \\ \delta w_1 &= -(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) \cdot w_3 \\ \delta w_2 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot w_3 \end{aligned}$$

sich proportional zu

$$\Phi = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

ergibt, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die den drei benutzten Ausgangsbahnen $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(3)}$ zugehörigen Parameterwerte bedeuten. Ist etwa für λ_4 der Fehler der dreigliedrigen Näherung bekannt, so ergibt sich der Fehler einer Bahn mit dem Parameter λ zu

$$\delta w(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_1)}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)} \cdot \delta w(\lambda_4) .$$

Setzt man $\lambda_3 = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, so erreicht der Fehler für

$$\lambda = \frac{1}{6} \cdot [(3 + \sqrt{3}) \cdot \lambda_{1,2} + (3 - \sqrt{3}) \lambda_{2,1}]$$

die maximalen entgegengesetzt gleichen Werte

$$\delta w_{\max} = \pm\, 0{,}05\, (\lambda_2 - \lambda_1)^3 \cdot w_3 .$$

Für das Verhältnis der maximalen Fehler der zwei- und der dreigliedrigen Näherung ergibt sich hieraus mit $w_3 = \dfrac{w_0}{4\lambda^3}$ ungefähr:

$$\frac{\delta w_{\max}}{\Delta w_{\max}} = 0{,}3 \cdot \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} ,$$

wo $\dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$ in der unteren Winkelgruppe — ungünstig — mit 0,3 angenommen werden kann. Setzt man den bei der zweigliedrigen Näherung äußerst möglichen Fehler mit 1 % an, so ergibt sich der Fehler der dreigliedrigen Näherung hiernach in der Größenordnung 10^{-4}.

Essen. Walter Correll. 234

Erwiderung. An einem numerischen Beispiel stellt Herr Correll fest, daß die von mir in der erwähnten Arbeit durchgeführte Fehlerabschätzung zu kleine Werte liefert und folgert daraus, daß sie für große Erhöhungen und Flugzeiten nicht zutrifft. — Die Abschätzung

$$\Delta_a(\%) = 100 \cdot \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 ; (a = z, y, w) . \quad . \quad (1)$$

nimmt keine Rücksicht auf die Flugzeit, obwohl tatsächlich der Fehler stark von ihr abhängt. Die Abschätzung (1) soll, wie die Art der Ableitung auch zeigt, nicht den Fehler seiner Größe nach liefern, sondern nur einen ganz rohen, der ersten Orientierung dienenden Anhalt für den zu erwartenden Interpolationsfehler ergeben. Für genauere Abschätzungen trifft (1) nicht zu, und insofern ist der Einwand von Herrn Correll berechtigt. — Man weist nun leicht nach, daß bei der linearen Interpolation die Reihe $w(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda^n \cdot w_n(t)$ durch die Summe $w(\lambda, t) = \overline{w}_0(t) + \lambda \cdot \overline{w}_1(t)$ ersetzt wird, wobei stets

$$\overline{w}_1(t) > \sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda^{n-1} \cdot w_n(t) \quad \text{und} \quad \overline{w}_0(t) < w_0(t) \quad (2)$$

wird. Andererseits ist offenbar die Abschätzung (1) wegen ihrer Herleitung aus der harmonischen Reihe gebunden an die Voraussetzung

$$\left[\frac{w^{(1)} + w^{(2)}}{2} - \overline{w}_0\right] \leqq \frac{5}{6} \cdot \overline{w}_0 . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Diese Ungleichung ist aber für große Flugzeiten infolge der verschlechterten Konvergenz der Reihen nicht mehr erfüllt. Vielmehr gilt dann

$$\frac{\dfrac{w^{(1)} + w^{(2)}}{2} - \overline{w}_0}{\overline{w}_0} = \mu \cdot \frac{5}{6} , \quad \text{wo } \mu \geqq 1 .$$

Die Abschätzung (1) führt daher in den meisten Fällen zu besseren Ergebnissen, wenn man setzt

$$\overline{\Delta}_a(\%) = \mu \cdot \Delta_a(\%) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Herr Correll leitet ferner auf Grund der Voraussetzungen für (1) ab, daß das Fehlerverhältnis der quadratischen zur linearen Annäherung in der Größenordnung 10^{-4} liegen müsse. Diese Tatsache besagt, daß die dreigliedrige Annäherung in allen Fällen Werte liefert, die innerhalb der geforderten Genauigkeit liegen. Diese Aussage läßt sich auch durch exaktere Betrachtungen gewinnen und führt dann für den größten Fehler im Intervall (λ_1, λ_2) zu folgender Abschätzung

$$\left.\begin{aligned} \Delta_a(\%) &= 100 \cdot \left| \frac{(n_a - 1)(a^{(2)} - a^{(1)})}{a^{(2)} \cdot (n_a + 3) + a^{(1)} \cdot (3 n_a + 1)} \right| ; \\ &\qquad (a = y, z, w) \\ \text{wo} \\ n_a &\sim \left(\frac{1 - \omega \cdot \lambda_1}{1 - \omega \cdot \lambda_2}\right)^2 , \ (\omega \sim 0{,}5;\ \text{genauer } 0 < \omega < 1) \\ \text{oder} \\ n_z &= \left(\frac{z^{(2)}}{z^{(1)}}\right)^\sigma , (\sigma \sim 3);\ n_y \sim \left(\frac{y^{(2)}}{y^{(1)}}\right)^\tau , (\tau \sim 4) \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Dabei wurden näherungsweise die Kurven $a(\lambda, t) t = \text{const.}$ als Kurven 2. Ordnung in λ angenommen.

Die Formeln (4) und (5) liefern in allen Fällen genügend genaue Werte, wie mehrere durchgerechnete numerische Beispiele zeigten. — Ich werde gelegentlich einer wahrscheinlich demnächst abgeschlossenen größeren Arbeit ausführlicher auf Konvergenz- und Fehlerfragen u. a. eingehen.

Berlin. Dr. H. Athen. 234

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany.
Copyright 1939 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. — Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz